UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Gabriel de Oliveira Lucena

Sobre aplicações cíclicas, H-espaços e grupos de Gottlieb

São José do Rio Preto
2021

Gabriel de Oliveira Lucena

Sobre aplicações cíclicas, H-espaços e grupos de Gottlieb

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Thiago de Melo

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2021

L935a

Lucena, Gabriel de Oliveira
Sobre aplicações cíclicas, H-espaços e grupos de Gottlieb / Gabriel de Oliveira Lucena. -- São José do Rio Preto, 2021
89 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Thiago de Melo

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria da homotopia. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Gabriel de Oliveira Lucena

Sobre aplicações cíclicas, H-espaços e grupos de Gottlieb

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior
Departamento de Matemática - UFSCar

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Departamento de Matemática - IBILCE

Rio Claro
26 de fevereiro de 2021

Aos meus pais e ao meu irmão
nóis é o time

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Teresinha e Francisco, por todo amor e apoio que me deram, fundamentais para minha formação, e pelos ensinamentos de amor ao próximo, que tento sempre tomar como guia de minhas atitudes.

Agradeço ao meu irmão, Guilherme, que mesmo nas vezes em que não fui um bom irmão, sempre me retribuiu com amor e respeito. Ainda preciso trabalhar muito para me tornar digno do excelente irmão que ele sempre foi pra mim. Agradeço também por toda a ajuda na elaboração dessa dissertação, sempre disposto a revisar minha gramática ou opinar sobre a melhor forma de escrever uma frase.

Agradeço a toda minha família: primos, tios, avós, etc. Em especial, minha madrinha Conceição, meu padrinho Sérgio, e meu primo Alan, que concluiu um curso de mestrado no inicio de 2020 e foi uma importante inspiração.

Agradeço a todos os meus colegas de escola, principalmente aqueles com os quais nunca perdi contato e se tornaram um grupo de amigos imensamente importante durante meu tempo de faculdade, incluindo Douglas, Matteo, Noelle, Thiago Barata, Thiago Rios, Yoku, Zé e todos os amigos de outros lugares que foram se juntando ao grupo com o tempo.

Agradeço aos meus companheiros de graduação, mestrado, sinuca e festas da UNESP - Rio Claro, que são muitos para tentar citar todos.

Agradeço aos meus professores de ensino fundamental e médio. Em especial à Regina, pelo interesse que despertou em mim pela matemática já na segunda série, à Leda, que teve um carinho muito grande por mim, à Rosana, que me ajudou a entender o mundo da forma que entendo hoje e se tornou uma grande amiga, e aos meus professores de matemática, Maria de Lurdes, Alessandro, Ana Maria, Luciano e Auriluci.

Agradeço à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, que me deu a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) e do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), a todos os meus colegas do

PIC e ao professor Marco.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UNESP - Rio Claro. Em especial à Alice Kimie Miwa Libardi que me orientou em iniciação científica no meu primeiro ano de graduação, ao Thiago de Melo, que me orientou em iniciação científica e mestrado, e à Suzete Maria Silva Afonso, cujos conselhos me ajudaram muito nos momentos difíceis da minha graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é estudar aplicações cíclicas, tomando o artigo *On cyclic maps* de K. L. Lim como base. Estudamos também H-espaços e grupos de Gottlieb, que surgem naturalmente como temas centrais a partir da forte relação com as aplicações cíclicas. Damos ênfase a dois resultados de T. Ganea, um sobre Produto de Whitehead e outro sobre a relação entre o funtor *Loop* e aplicações centrais, que resulta em uma relação entre aplicações cíclicas e aplicações centrais. Além disso, apresentamos alguns assuntos mais básicos da Teoria de Homotopia, necessários na discussão de nossos objetivos principais, incluindo Fibrações, Cofibrações, Pushouts e Pullbacks, tomando o livro *Introduction to Homotopy Theory* de M. Arkowitz como base.

Palavras-chave: Matemática, Topologia algébrica, Teoria da homotopia.

ABSTRACT

The aim of this work is to study cyclic maps, based on the paper On cyclic maps by K. L. Lim. We also study H-spaces and Gottlieb groups, which emerge naturally as central topics, given their strong relation to cyclic maps. We emphasize two results due to T. Ganea, one on the Whitehead Product and one on the relation between the Loop functor and central maps, which results in a relation between cyclic maps and central maps. Furthermore, we present some basic topics from Homotopy Theory, which are necessary in the discussion of our primary objectives, including Fibrations, Cofibrations, Pushouts and Pullbacks, taking the book Introduction to Homotopy Theory by M. Arkowitz as a main reference.

Keywords: Mathematics, Algebraic topology, Homotopy theory.

Sumário

1 Introdução **15**

2 Requisitos **17**
2.1 CW-complexos 18
2.2 Avaliação e Lei Exponencial 20
2.3 Sequências 21

3 H-espaços e co-H-espaços **25**
3.1 Definições e Estrutura de Grupo em $[X, Y]$ 25
3.2 Espaço de Laços e Suspensão 30

4 Cofibrações e Fibrações **39**
4.1 Cofibrações 39
4.2 Fibrações 43

5 Pushouts e Pullbacks **47**
5.1 Pushout e Mapping Cone 47
5.2 Homotopy Pushout 54
5.3 Pullback e Homotopy Fiber 63
5.4 Homotopy Pullback 73

6 Aplicações Cíclicas e Centrais **77**
6.1 Aplicações Cíclicas 77
6.2 Produto de Whitehead e Aplicações Centrais 81

Referências **87**

Índice Remissivo **89**

1 Introdução

Em [8], D. H. Gottlieb introduziu um certo subgrupo $G(X, x_0)$ do grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, para todo CW-complexo conexo X, por meio do conceito de homotopias cíclicas. Tal grupo também pode ser definido por meio da aplicação avaliação $\omega\colon B^A \to B$, onde B^A denota o espaço das funções contínuas de A em B, com a topologia compacto-aberto. Assim, $G(X, x_0)$ também pode ser chamado de subgrupo avaliação de X. Em [9], o mesmo autor estende essa noção para um subgrupo $G_n(X, x_0)$ do grupo de homotopia $\pi_n(X, x_0)$.

Uma aplicação $f\colon A \to X$ é chamada cíclica quando $(\mathrm{id} \vee f) \circ \nabla\colon X \vee A \to X$ pode ser estendida para o produto cartesiano $X \times A$. Essa definição foi dada por K. Varadarajan em [19] para introduzir os conjuntos $G(A, X)$, que além de generalizarem os grupos de Gottlieb $G(X, x_0)$, também nos permite estudar as aplicações cíclicas de um modo mais amplo.

Essas aplicações são ferramentas úteis, por exemplo, no contexto das sequências exatas. Se $f\colon A \to X$ é cíclica, $f_*\colon [Z, A] \to [Z, X]$ tem imagem contida em $G(Z, X)$. Desse modo, informações a respeito de $G(Z, X)$ nos dão informações a respeito de sequências onde f_* aparece, e vice-versa. Veremos que o conectante da sequência exata de uma fibração é cíclica e, desse modo, os argumentos que usamos para a aplicação f podem ser aplicados com frequência na prática.

Para o desenvolvimento do nosso trabalho, algumas ferramentas da Teoria de Homotopia nos serão necessárias. Entre elas, as fibrações, os *pullbacks*, os H-espaços e seus respectivos duais. Tendo em mente que esses assuntos também são interessantes individualmente, os estudaremos detalhadamente.

No Capítulo 1, discutiremos brevemente os CW-complexos e algumas definições iniciais sobre sequências de funções. Também, apresentaremos referências que garantirão a continuidade de várias funções que aparecem em boa parte do texto.

No Capítulo 2, estudaremos os (co-)H-espaços, que nos levam a uma estrutura de grupo no conjunto $[X, Y]$ de classes de homotopia de aplicações de X em Y. Nesse contexto, encontramos os espaços de laços ΩX e as suspensões ΣX.

No Capítulo 3, veremos as definições e algumas propriedades básicas das fibrações e cofibrações. Daremos continuidade a esse assunto no Capítulo 4, por meio do *mapping cone* e da *homotopy fiber*, no contexto dos *pushouts* e *pullbacks*. Utilizaremos tais objetos como ferramentas para construir as sequências exata e coexata de uma aplicação. Definiremos também o *homotopy pushout*, que utilizaremos para relacionar diferentes mapping cones e definir o *join* $X * Y$.

Finalmente, no Capítulo 5, discutiremos as aplicações cíclicas, citadas anteriormente, bem como as aplicações centrais, que estão fortemente relacionadas com o centro dos grupos $[X, Y]$. Apresentaremos brevemente o produto de Whitehead e provaremos dois resultados de T. Ganea, utilizados para relacionar aplicações cíclicas e centrais.

2 Requisitos

Nesse capítulo, apresentamos algumas definições e resultados que não necessariamente fazem parte dos nossos objetivos, mas são necessários para o resto do texto. Por isso, não nos aprofundaremos muito em nenhum dos assuntos.

Iniciamos apresentando algumas convenções:

- Em todo o texto, *espaço* significa *espaço topológico com ponto base e com o tipo de homotopia de um* ***CW-complexo*** *com ponto base* (que definiremos na seção seguinte), *aplicação* significa *função contínua baseada* e *homotopia* significa *homotopia baseada*. Quando for necessário lidar com homotopias não necessariamente baseadas, essas serão chamadas de *homotopias livres*. Além disso, no Capítulo 4, vamos definir o que é um espaço com *ponto base não degenerado* e assumir, a partir dali, que todos os espaços sejam desse tipo.

- Escrevemos $X \approx Y$ para dizer que os espaços X e Y são homeomorfos. Quando conveniente, trataremos espaços homeomorfos como espaços iguais.

- O ponto base de um espaço X será denotado por $*$ ou $*_X$ quando for necessário explicitar o espaço. O espaço unitário $\{*\}$ será denotado apenas por $*$ quando for conveniente simplificar a notação. Denotaremos também por $*\colon X \to Y$ a aplicação constante dada por $*(x) = *_Y$ para todo $x \in X$.

- Denotaremos por id_X, ou simplesmente por id quando for conveniente, a aplicação identidade de X.

- Denotaremos por I o intervalo fechado $[0, 1]$ com ponto base 0, por S^n a esfera n-dimensional com ponto base $(1, 0, \ldots, 0)$ e por D^n o disco n-dimensional com ponto base $(1, 0, \ldots, 0)$.

- Dado um espaço X, denotaremos por $\langle x \rangle$ a classe de equivalência de um elemento $x \in X$ em um quociente $X/\!\sim$ (ou X/A para algum $A \subset X$).

Especificamente sobre produtos de espaços, temos:

- Dados dois espaços X e Y, denotamos por $X \vee Y$ o subespaço $(X \times \{*\}) \cup (\{*\} \times Y)$ do cartesiano $X \times Y$. O espaço quociente $(X \times Y)/(X \vee Y)$ é chamado *produto smash* de X e Y e é denotado por $X \wedge Y$.

- Dadas duas funções $f\colon A \to X$ e $g\colon B \to Y$, definimos a função $f \times g\colon A \times B \to X \times Y$ por $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$, para todo $(a, b) \in A \times B$. Se f e g são funções baseadas, podemos restringir o domínio e o contradomínio de $f \times g$ para $A \vee B$ e $X \vee Y$. Essa restrição será denotada por $f \vee g\colon A \vee B \to X \vee Y$.

- Denotamos por $\Delta\colon X \to X \times X$, ou Δ_X quando for necessário especificar o espaço, a aplicação diagonal $\Delta(x) = (x, x)$ e por $\nabla\colon X \vee X \to X$, ou ∇_X quando for necessário especificar o espaço, a aplicação *folding*, que é dada por $\nabla(x, *) = x$ e $\nabla(*, x) = x$, para todo $x \in X$.

Sobre homotopias, utilizaremos as seguintes notações:

- Escrevemos $X \simeq Y$ e $f \simeq g$ para dizer que X e Y têm o mesmo tipo de homotopia e que f e g são aplicações homotópicas, respectivamente.

- Muitas vezes é útil pensar em uma homotopia $H\colon X \times I \to Y$ em termos das aplicações $h_t\colon X \to Y$ dadas por $h_t(x) = H(x, t)$, para todo $x \in X$ e $t \in I$. Quando conveniente, diremos apenas que $h_t\colon X \to Y$ é uma homotopia, deixando subentendido que há uma aplicação $H\colon X \times I \to Y$ que determina as aplicações h_t.

- Dadas aplicações $f, g\colon X \to Y$, escrevemos $H\colon f \simeq g$ ou $f \simeq_H g$ para dizer que $H\colon X \times I \to Y$ é uma homotopia entre f e g, com $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Escrevemos também $h_t\colon f \simeq g$ ou $f \simeq_{h_t} g$ para dizer que h_t é uma homotopia entre f e g, com $h_0 = f$ e $h_1 = g$.

- Dados dois espaços X e Y, denotaremos por $[X, Y]$ o conjunto de classes de homotopia de aplicações de X em Y. Dadas $f\colon X' \to X$ e $g\colon Y \to Y'$ aplicações, chamamos de induzidas de f e g, e denotamos por $f^*\colon [X, Y] \to [X', Y]$ e $g_*\colon [X, Y] \to [X, Y']$ respectivamente, as aplicações dadas por $f^*([h]) = [h \circ f]$ e $g_*([h]) = [g \circ h]$, para todo $[h] \in [X, Y]$.

2.1 CW-complexos

Definição 2.1. Um espaço topológico X é chamado *CW-complexo* quando existe uma sequência $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots$ de subespaços de X, com $\bigcup X^n = X$, tais que:

1. X^0 é um conjunto discreto (contendo $*_X$, caso X possua ponto base),

2. para cada $n > 0$, X^n é o espaço quociente $X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha / \sim$, onde $\sim$ é dada por $x \sim \phi_\alpha(x)$, para cada $x \in \partial D^n_\alpha$ e alguma coleção de aplicações $\phi_\alpha\colon \partial D^n_\alpha = S^{n-1} \to X^{n-1}$.

3. a topologia de X coincide com a topologia fraca com respeito aos subespaços X^n.

A composição da inclusão $D^n_\beta \hookrightarrow X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha$ com a função quociente $X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha \to X^n$ é chamada função característica. A imagem, em X, de um disco D^n por uma função característica é chamada *n-célula fechada*, ou simplesmente *célula fechada*, de X e a imagem do interior de um disco D^n é chamada de *n-célula aberta*, ou simplesmente *célula aberta*, de X.

Dizemos que um subconjunto fechado $A \subset X$ é um *subcomplexo* de X se A é união de células (abertas) de X.

Como sugerido antes, trabalharemos apenas com espaços que têm o tipo de homotopia de CW-complexos. Essa exigência nem sempre é necessária, porém a categoria dos espaços com tipo de homotopia de CW-complexos inclui a maioria dos espaços estudados na prática, de modo que a exigência não se torna muito restritiva, mesmo quando não é essencial.

Os CW-complexos (e espaços com o tipo de homotopia de CW-complexos) não serão úteis diretamente pela estrutura dada na definição, mas sim por alguns resultados, como a propriedade da extensão de homotopia, que enunciamos a seguir.

Definição 2.2. Sejam (X, A) um par de espaços topológicos, com $A \subset X$, e $i\colon A \hookrightarrow X$ a inclusão. Dizemos que (X, A) tem a *propriedade de extensão de homotopia livre* se dados um espaço topológico Z, uma função contínua $h\colon X \to Z$ e uma homotopia livre $g_t\colon A \to Z$ tais que $h \circ i = g_0$, existe uma homotopia livre $h_t\colon X \to Z$ tal que $h_0 = h$ e $h_t \circ i = g_t$ para todo $t \in I$.

Tomando $G\colon A \times I \to Z$ a homotopia dada por $G(a, t) = g_t(a)$ e $H\colon X \times I$ a homotopia dada por $H(x, t) = h_t(x)$, temos o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "g_0"] \arrow[dd, hook] & & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[dd, hook] \\
& Z & \\
A \times I \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, hook, "i \times \mathrm{id}_I"] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "H"']
\end{tikzcd}$$

Se X possui ponto base e o subespaço A contém esse ponto base, definimos a *propriedade de extensão de homotopia* analogamente, bastando substituir as funções contínuas por aplicações e homotopias livres por homotopias (consequentemente, isso nos restringe a Z também com ponto base). Verifica-se facilmente que, nessas condições, se (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia livre, então também tem a propriedade de extensão de homotopia.

Uma versão mais geral da proposição a seguir está provada em [1, Proposição 1.5.17].

Proposição 2.3. *Se (X, A) é um par CW, isto é, X é CW-complexo e $A \subset X$ é subcomplexo, então (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia livre.*

Dados X e Y CW-complexos, gostaríamos que $X \times Y$ também fosse um CW-complexo. Existem formas naturais de definir uma estrutura de CW-complexo no conjunto $X \times Y$ a partir das estruturas de X e Y, mas isso pode resultar em uma topologia em $X \times Y$ que não coincide com a topologia produto. Para corrigir isso, exigir algumas hipóteses adicionais sobre os CW-complexos pode ser útil.

Definição 2.4. Seja X um CW-complexo. Dizemos que

- X é finito se X possui um número finito de células,
- X é enumerável se X possui um número enumerável de células,
- X é localmente finito se cada ponto de X está no interior de um subcomplexo finito de X,
- X é localmente enumerável se cada ponto de X está no interior de um subcomplexo enumerável de X.

Os itens da proposição a seguir são os itens (iii) e (iv) de [2, Teorema 2.11].

Proposição 2.5. *Sejam X e Y CW-complexos.*

- *Se X (ou Y) é localmente finito, então $X \times Y$ é um CW-complexo.*
- *Se X e Y são localmente enumeráveis, então $X \times Y$ é um CW-complexo.*

O lema a seguir, provado em [5, Lema 3.2], conecta alguns dos itens da Definição 2.4.

Lema 2.6. *Se X é um CW-complexo localmente finito e conexo por caminhos, então X é um CW-complexo enumerável.*

Mesmo em CW-complexos que não são conexos por caminhos, o lema acima ainda nos dá informação sobre cada componente conexa por caminhos do espaço e, em particular, sobre a componente do ponto base.

2.2 Avaliação e Lei Exponencial

Dados X e Y espaços topológicos quaisquer, denote por Y^X o espaço das funções contínuas $X \to Y$, com a topologia compacto-aberto. Se X e Y forem espaços baseados, tomamos a aplicação constante $*\colon X \to Y$ como ponto base de Y^X e denotamos por $C_*(X, Y)$ o subespaço de Y^X das funções contínuas baseadas, ou seja, das aplicações.

A proposição a seguir está provada em [16, Teorema 46.10].

Proposição 2.7. *Se X é localmente compacto e Hausdorff, e Y é um espaço topológico qualquer, então a função $e\colon X \times Y^X \to Y$, dada por*

$$e(x, f) = f(x),$$

é contínua.

A função $e\colon X \times Y^X \to Y$ é normalmente chamada de *função avaliação*. A versão baseada da proposição acima é obtida facilmente a partir da restrição $e|_{X \times C_*(X,Y)}$.

A proposição a seguir, muitas vezes chamada de "lei exponencial", é um caso particular de [3, Corolário 1.8], obtido a partir de [2, Teorema 2.11] e do homeomorfismo $Y \times Z \to Z \times Y$ (ver também [2, Proposições 2.3 e 3.5]).

Proposição 2.8. *Sejam X um espaço topológico qualquer, Y um espaço localmente compacto e Z um CW-complexo. Então a função $\mu\colon X^{Y \times Z} \to (X^Y)^Z$ dada por*

$$\mu(f)(z)(y) = f(y, z)$$

é um homeomorfismo, para todo $f \in X^{Y \times Z}$, $y \in Y$ e $z \in Z$.

O corolário a seguir é uma aplicação útil da proposição anterior:

Corolário 2.9. *Sejam $H\colon X \times I \to Y$ uma homotopia e $h_t\colon X \to Y$ as aplicações dadas por $h_t(x) = H(x, t)$, para $t \in I$. Então a associação $t \mapsto h_t$ é contínua.*

Demonstração. Basta notar que $h_t = \mu(H)(t)$ e $\mu(H) \in (Y^X)^I$ é contínua. □

De modo análogo, temos o seguinte:

Corolário 2.10. *Sejam $H\colon X \times I \to Y$ uma homotopia e $\alpha_x\colon I \to Y$ as aplicações dadas por $\alpha_x(t) = H(x, t)$, para $t \in I$ e $x \in X$. Então a associação $x \mapsto \alpha_x$ é contínua.*

Para espaços baseados, temos a proposição a seguir, provada em [14, Teorema 6.2.38].

Proposição 2.11. *Sejam X um espaço topológico qualquer, Y e Z espaços localmente compactos e Hausdorff. Se X, Y e Z são baseados, então a função $\mu'\colon C_*(Z \wedge Y, X) \to C_*(Z, C_*(Y, X))$ dada por*

$$\mu'(f)(z)(y) = f\langle z, y\rangle$$

é um homeomorfismo, para quaisquer $f \in C_*(Z \wedge Y, X)$, $y \in Y$ e $z \in Z$.

Os resultados citados nessa seção possuem versões, discutidas em [17], aplicáveis a espaços quaisquer, sem a necessidade de exigir que algum dos espaços seja CW-complexo ou então localmente compacto. No entanto, nesse caso, há necessidade de alterar a topologia dos espaços.

2.3 Sequências

Definição 2.12. Dizemos que uma sequência de funções baseadas entre conjuntos baseados

$$\cdots \longrightarrow S_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} S_i \xrightarrow{\phi_i} S_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

é exata em S_i quando $\mathrm{Ker}(\phi_i) = \mathrm{Im}(\phi_{i+1})$. Dizemos que a sequência é exata se ela é exata em S_i para todo i.

Dada outra sequência exata

$$\cdots \longrightarrow S'_{i+1} \xrightarrow{\phi'_{i+1}} S'_i \xrightarrow{\phi'_i} S'_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

dizemos que uma coleção de funções baseadas $\{h_i\colon S_i \to S'_i\}$ é uma aplicação de sequências se $\phi'_i \circ h_i = h_{i-1} \circ \phi_i$ para todo i, isto é, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{i+1} \arrow[r, "\phi_{i+1}"] \arrow[d, "h_{i+1}"] & S_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "h_i"] & S_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S'_{i+1} \arrow[r, "\phi'_{i+1}"] & S'_i \arrow[r, "\phi'_i"] & S'_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposição 2.13. *Sejam*

$$\cdots \longrightarrow S_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} S_i \xrightarrow{\phi_i} S_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S'_{i+1} \xrightarrow{\phi'_{i+1}} S'_i \xrightarrow{\phi'_i} S'_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

sequências de funções baseadas. Se uma das sequências for exata e existir uma aplicação de sequências $\{h_i\colon S_i \to S'_i\}$ tal que cada h_i possui inversa $h_i^{-1}\colon S'_i \to S_i$, então a outra sequência também é exata.

Demonstração. Suponha que a segunda sequência é exata. Dado $u \in \mathrm{Im}(\phi_{i+1}) \subset S_i$, temos que $u = \phi_{i+1}(v)$ para alguma $v \in S_{i+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
\phi_i(u) = \phi_i \circ \phi_{i+1}(v) &= h_{i-1}^{-1} \circ h_{i-1} \circ \phi_i \circ \phi_{i+1}(v) \\
&= h_{i-1}^{-1} \circ \phi'_i \circ h_i \circ \phi_{i+1}(v) = h_{i-1}^{-1} \circ \phi'_i \circ \phi'_{i+1} \circ h_{i+1}(v) = *.
\end{aligned}$$

Isso prova que $\mathrm{Im}(\phi_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(\phi_i)$.

Por outro lado, dado $u \in \mathrm{Ker}(\phi_i)$, temos que

$$*_{S_{i-1}} = \phi_i(u) = h_{i-1}^{-1} \circ h_{i-1} \circ \phi_i(u) = h_{i-1}^{-1} \circ \phi_i' \circ h_i(u)$$

e, portanto,

$$\phi_i' \circ h_i(u) = h_{i-1}(*_{S_{i-1}}) = *_{S_{i-1}'}.$$

Como $\mathrm{Ker}(\phi_i') = \mathrm{Im}(\phi_{i+1}')$, existe $v \in S_{i+1}'$ tal que $h_i(u) = \phi_{i+1}'(v)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} u = h_i^{-1} \circ \phi_{i+1}'(v) = h_i^{-1} \circ \phi_{i+1}' \circ h_{i+1} \circ h_{i+1}^{-1}(v) \\ = h_i^{-1} \circ h_i \circ \phi_{i+1} \circ h_{i+1}^{-1}(v) = \phi_{i+1}(h_{i+1}^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Logo, $u = \phi_{i+1}(h_{i+1}^{-1}(v)) \in \mathrm{Im}(\phi_i)$ e concluímos $\mathrm{Ker}(\phi_i) \subset \mathrm{Im}(\phi_{i+1})$.

Supondo que a primeira sequência é exata, provamos que a segunda também é exata analogamente, bastando notar que

$$\phi_i \circ h_i^{-1} = h_{i-1}^{-1} \circ h_{i-1} \circ \phi_i \circ h_i^{-1} = h_{i-1}^{-1} \circ \phi_i' \circ h_i \circ h_i^{-1} = h_{i-1}^{-1} \circ \phi_i',$$

isto é, $\{h_i^{-1} \colon S_i' \to S_i\}$ é uma aplicação de sequências. □

Definição 2.14. Dizemos que uma sequência de aplicações

$$\cdots \longrightarrow X_3 \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1$$

é exata se a sequência de funções baseadas entre conjuntos baseados

$$\cdots \longrightarrow [Z, X_3] \xrightarrow{f_{3*}} [Z, X_2] \xrightarrow{f_{2*}} [Z, X_1]$$

é exata para todo espaço Z.

Dizemos que uma sequência de aplicações

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots$$

é coexata se a sequência de funções baseadas entre conjuntos baseados

$$\cdots \longrightarrow [X_3, Z] \xrightarrow{f_2^*} [X_2, Z] \xrightarrow{f_1^*} [X_1, Z]$$

é exata para todo espaço Z.

Definição 2.15. Dizemos que duas sequências exatas de aplicações

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

e

$$\cdots \longrightarrow Y_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} Y_i \xrightarrow{g_i} Y_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

são equivalentes se existe uma coleção de equivalências de homotopia $\{h_i \colon X_i \to Y_i\}$ tal que $g_i \circ h_i \simeq h_{i+1} \circ f_i$ para todo i, isto é, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "h_{i-1}"] & X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h_i"] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] & Y_i \arrow[r, "g_i"] & Y_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Note que, para sequências decrescentes, é necessário adaptar os índices, obtendo $g_i \circ h_i \simeq h_{i-1} \circ f_i$.

Proposição 2.16. *Se*

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots \quad e \quad Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_3 \longrightarrow \cdots$$

são sequências equivalentes de aplicações, e uma delas é coexata, então a outra também é.

Demonstração. Suponha $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots$ coexata. Seja $\{h_i \colon X_i \to Y_i\}$ uma coleção de equivalências de homotopia com $g_i \circ h_i \simeq h_{i+1} \circ f_i$. Para cada i, seja $h'_i \colon Y_i \to X_i$ a inversa homotópica de h_i.

Dado Z um espaço arbitrário, considere $h_i^* \colon [Y_i, Z] \to [X_i, Z]$ e $h_i'^* \colon [X_i, Z] \to [Y_i, Z]$. Então, temos que $h_i^* \circ h_i'^*[u] = [u \circ h'_i \circ h_i] = [u \circ \mathrm{id}] = [u]$ para toda $u \colon X_i \to Z$, isto é, $h_i^* \circ h_i'^* = \mathrm{id}$. Analogamente temos $h_i'^* \circ h_i^* = \mathrm{id}$ e concluímos $h_i'^* = h_i^{*-1}$.

Além disso, para todo $[u] \in [Y_i, Z]$, temos que $f_i^* \circ h_{i+1}^*[u] = [u \circ h_{i+1} \circ f_i] = [u \circ g_i \circ h_i] = h_i^* \circ g_i^*[u]$, isto é, $f_i^* \circ h_{i+1}^* = h_i^* \circ g_i^* = h_{(i+1)-1}^* \circ g_i^*$ e o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {[Y_3, Z]} \arrow[r, "g_2^*"] \arrow[d, "h_3^*"] & {[Y_2, Z]} \arrow[r, "g_1^*"] \arrow[d, "h_2^*"] & {[Y_1, Z]} \arrow[d, "h_1^*"] \\
\cdots \arrow[r] & {[X_3, Z]} \arrow[r, "f_2^*"] & {[X_2, Z]} \arrow[r, "f_1^*"] & {[X_1, Z]}
\end{tikzcd}$$

Por fim, temos pela Proposição 2.13 que

$$\cdots \longrightarrow [Y_3, Z] \xrightarrow{g_2^*} [Y_2, Z] \xrightarrow{g_1^*} [Y_1, Z]$$

é exata e, consequentemente,

$$Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_3 \longrightarrow \cdots$$

é coexata. □

Proposição 2.17. *Se*

$$\cdots \longrightarrow X_3 \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \quad e \quad \cdots \longrightarrow Y_3 \xrightarrow{g_3} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_1$$

são sequências equivalentes de aplicações, e uma delas é exata, então a outra também é.

Demonstração. Embora a prova seja análoga à anterior, optamos por escrevê-la por completo, para fins de referências futuras. Suponha $\cdots \longrightarrow X_3 \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1$ exata. Seja $\{h_i \colon X_i \to Y_i\}$ uma coleção de equivalências de homotopia com $g_i \circ h_i \simeq h_{i-1} \circ f_i$. Para cada i, seja $h'_i \colon Y_i \to X_i$ a inversa homotópica de h_i.

Dado Z um espaço arbitrário, considere $h_{i*} \colon [Z, X_i] \to [Z, Y_i]$ e $h'_{i*} \colon [Z, Y_i] \to [Z, X_i]$. Então, temos que $h_{i*} \circ h'_{i*}[u] = [h_i \circ h'_i \circ u] = [\mathrm{id} \circ u] = [u]$, isto é, $h_{i*} \circ h'_{i*} = \mathrm{id}$. Analogamente temos $h'_{i*} \circ h_{i*} = \mathrm{id}$ e concluímos $h'_{i*} = h_{i*}^{-1}$.

Além disso, para todo $[u] \in [Z, X_i]$, temos que $g_{i*} \circ h_{i*}[u] = [g_i \circ h_i \circ u] = [h_{i-1} \circ f_i \circ u] = h_{i-1*} \circ f_{i*}[u]$, isto é, $g_{i*} \circ h_{i*} = h_{i-1*} \circ f_{i*}$ e o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {[Z,X_3]} \arrow[r, "f_{3*}"] \arrow[d, "h_{3*}"] & {[Z,X_2]} \arrow[r, "f_{2*}"] \arrow[d, "h_{2*}"] & {[Z,X_1]} \arrow[d, "h_{1*}"] \\
\cdots \arrow[r] & {[Z,Y_3]} \arrow[r, "g_{3*}"] & {[Z,Y_2]} \arrow[r, "g_{2*}"] & {[Z,Y_1]}
\end{tikzcd}$$

Por fim, temos pela Proposição 2.13 que

$$\cdots \longrightarrow [Z,Y_3] \xrightarrow{g_{3*}} [Z,Y_2] \xrightarrow{g_{2*}} [Z,Y_1]$$

é exata e, consequentemente,

$$\cdots \longrightarrow Y_3 \xrightarrow{g_3} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_1$$

é exata. $\square$

3 H-espaços e co-H-espaços

O conjunto $[X, Y]$ das classes de homotopia de aplicações $X \to Y$ possui uma estrutura de grupo clássica quando tomamos $X = S^n$, obtendo assim os grupos de homotopia $\pi_n(Y)$. Gostaríamos de construir uma operação no conjunto $[X, Y]$ para espaços X e Y mais gerais.

Nesse capítulo, apresentamos os co-H-espaços, que são espaços X com uma estrutura que nos permite definir uma operação em $[X, Y]$. Apresentamos o caso mais específico dos co-H-grupos, que nos permitem mostrar que essa operação determina uma estrutura de grupo, generalizando o conceito dos grupos de homotopia $\pi_n(Y)$. Definimos também os duais H-espaços e H-grupos, espaços Y que novamente permitem definir uma operação em $[X, Y]$.

Depois disso, apresentamos os espaços de laços e as suspensões, que são H-grupos e co-H-grupos, respectivamente, que podem ser obtidos a partir de um espaço qualquer. Por fim, definimos os grupos de homotopia $\pi_n(Y)$ como caso particular de $[X, Y]$ quando X é a n-esfera, e discutimos uma importante aplicação desses grupos com o Teorema de Whitehead.

A sequência de resultados a seguir é, em grande parte, adaptada de [1, Capítulo 2], com comentários e referências adicionais onde julgamos relevante.

3.1 Definições e Estrutura de Grupo em $[X, Y]$

Definição 3.1. Dizemos que um espaço Y é um *H-espaço* quando existe uma aplicação $m\colon Y \times Y \to Y$, chamada multiplicação, tal que:

(i) $m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta \simeq \mathrm{id} \simeq m \circ (* \times \mathrm{id}) \circ \Delta$, isto é, os diagramas a seguir comutam a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(\mathrm{id}\times *)\circ\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(*\times \mathrm{id})\circ\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Além disso, dizemos que Y é um *H-grupo* quando:

(ii) $m \circ (m \times \mathrm{id}) \simeq m \circ (\mathrm{id} \times m)$, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \times Y \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ Y \times Y \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

(iii) existe uma aplicação $i\colon Y \to Y$ tal que $m \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta \simeq * \simeq m \circ (i \times \mathrm{id}) \circ \Delta$, isto é, os diagramas a seguir comutam a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(\mathrm{id}\times i)\circ\Delta"] \arrow[dr, "*"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(i\times \mathrm{id})\circ\Delta"] \arrow[dr, "*"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Também chamamos de H-espaço o par (Y, m) do H-espaço Y com multiplicação m fixada. De modo similar, também chamamos de H-grupo a tripla (Y, m, i) do H-grupo Y com as aplicações m e i fixadas.

Observação 3.2. Note que há um abuso de notação ao escrever $m\circ(m\times\mathrm{id}) \simeq m\circ(\mathrm{id}\times m)$, pois o domínio de $m \times \mathrm{id}$ é $(Y \times Y) \times Y$ e o domínio de $\mathrm{id} \times m$ é $Y \times (Y \times Y)$. A definição entende esses espaços como sendo o mesmo que $Y \times Y \times Y$. Para escrever isso mais formalmente, basta fazer composição com os homeomorfismos naturais $\varphi\colon Y \times Y \times Y \to (Y \times Y) \times Y$ e $\psi\colon Y \times Y \times Y \to Y \times (Y \times Y)$. Assim, temos

$$m \circ (m \times \mathrm{id}) \circ \varphi \simeq m \circ (\mathrm{id} \times m) \circ \psi.$$

Para simplificar o texto, continuaremos fazendo esse abuso de notação e deixaremos as aplicações φ e ψ (e outras semelhantes) subentendidas.

Exemplo 3.3. Todo grupo topológico é um H-grupo. Por exemplo, todo grupo de Lie é também um H-grupo, em particular, os grupos de matrizes $GL_n(\mathbb{C})$ e as esferas S^0, S^1 (como complexos unitários) e S^3 (como quatérnios unitários). Temos também que S^7 é um H-espaço e é possível provar que S^0, S^1, S^3 e S^7 são os únicos exemplos de esferas que são H-espaços (ver [10, Seções 3.C e 4.B]).

Uma definição equivalente de H-espaço é dada pela proposição a seguir:

Proposição 3.4. *Sejam Y um espaço e $m\colon Y \times Y \to Y$ uma aplicação. Então (Y, m) é um H-espaço se, e somente se, $m \circ j \simeq \nabla$,*

$$\begin{tikzcd} Y \vee Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "\nabla"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

onde $j\colon Y \vee Y \to Y \times Y$ é a inclusão.

Demonstração. Para todo $y \in Y$ temos

$$\begin{aligned} &\nabla \circ ((m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta) \vee (m \circ (* \times \mathrm{id}) \circ \Delta))(y, *) \\ &\qquad = m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta(y) = m(y, *) = m \circ j(y, *). \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para $(*, y)$, concluímos que $\nabla\circ((m\circ(\mathrm{id}\times *)\circ\Delta)\vee(m\circ(*\times\mathrm{id})\circ\Delta)) = m\circ j$.

Se Y é H-espaço, temos

$$m \circ j = \nabla \circ ((m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta) \vee (m \circ (* \times \mathrm{id}) \circ \Delta)) \simeq \nabla \circ (\mathrm{id} \vee \mathrm{id}) = \nabla.$$

Agora suponha que $m \circ j \simeq \nabla$. Note que a imagem de $(\mathrm{id} \times *) \circ \Delta$ está contida em $Y \vee Y$, então podemos restringir seu contradomínio e obter $d\colon Y \to Y \vee Y$, de modo que

$$\mathrm{id} = \nabla \circ d \simeq m \circ j \circ d = m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta.$$

Provamos $\mathrm{id} \simeq m \circ (* \times \mathrm{id}) \circ \Delta$ analogamente e concluímos que Y é H-espaço. $\square$

A partir da multiplicação m de um H-espaço Y, podemos definir uma operação binária em $[X, Y]$.

Definição 3.5. Seja (Y, m) um H-espaço. Dadas duas aplicações $f, g\colon X \to Y$, denotaremos por $f + g$ a aplicação $f + g = m \circ (f \times g) \circ \Delta\colon X \to Y$.

Se $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$, temos $m \circ (f' \times g') \circ \Delta \simeq m \circ (f \times g) \circ \Delta$. Desse modo, podemos definir a operação binária $[f] + [g] = [f + g]$ em $[X, Y]$.

Proposição 3.6. *Se (Y, m) é H-espaço, então para todo espaço X e todo $[f] \in [X, Y]$ temos $[f] + [*] = [f] = [*] + [f]$. Além disso, se (Y, m, i) é H-grupo, então $([X, Y], +)$ é grupo.*

Demonstração. Para todo $x \in X$, temos que $(m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta \circ f)(x) = m(f(x), *) = (m \circ (f \times *) \circ \Delta)(x) = (f + *)(x)$ e, portanto, $f = \mathrm{id} \circ f \simeq m \circ (\mathrm{id} \times *) \circ \Delta \circ f = f + *$. Logo, $[f] = [f + *] = [f] + [*]$. Provamos $[f] = [*] + [f]$ analogamente e concluímos que $[*]$ é o elemento neutro da operação $+$.

Suponha agora que (Y, m, i) é H-grupo. Então dadas $f, g, h\colon X \to Y$, temos que

$$\begin{aligned}(f + g) + h &= m \circ ((m \circ (f \times g) \circ \Delta) \times h) \circ \Delta \\ &= m \circ (m \times \mathrm{id}) \circ (f \times g \times h) \circ (\mathrm{id} \times \Delta) \circ \Delta \simeq m \circ (\mathrm{id} \times m) \circ (f \times g \times h) \circ (\mathrm{id} \times \Delta) \circ \Delta \\ &= m \circ (f \times (m \circ (g \times h) \circ \Delta)) \circ \Delta = f + (g + h),\end{aligned}$$

isto é, $([f] + [g]) + [h] = [f] + ([g] + [h])$.

Por fim, note que para todo $x \in X$, temos $(m \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta \circ f)(x) = (m \circ (f \times (i \circ f)) \circ \Delta)(x) = (f + (i \circ f))(x)$, isto é, $f + (i \circ f) = m \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta \circ f \simeq * \circ f = *$. Logo, existe $[i \circ f]$ tal que $[f] + [i \circ f] = [f + (i \circ f)] = [*]$. Provamos $[i \circ f] + [f] = [*]$ analogamente. $\square$

Definição 3.7. Dizemos que um espaço X é um *co-H-espaço* quando existe uma aplicação $c\colon X \to X \vee X$, chamada comultiplicação, tal que:

(i) $\nabla \circ (\mathrm{id} \vee *) \circ c \simeq \mathrm{id} \simeq \nabla \circ (* \vee \mathrm{id}) \circ c$, isto é, os diagramas a seguir comutam a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ X \vee X \arrow[r, "\nabla\circ(\mathrm{id}\vee *)"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ X \vee X \arrow[r, "\nabla\circ(*\vee\mathrm{id})"'] & X \end{tikzcd}$$

Além disso, dizemos que X é um *co-H-grupo* quando existe uma aplicação $i\colon X \to X$ tal que

(ii) $(c \vee \mathrm{id}) \circ c \simeq (\mathrm{id} \vee c) \circ c$, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"'] & X \vee X \arrow[d, "c\vee\mathrm{id}"] \\ X \vee X \arrow[r, "\mathrm{id}\vee c"] & X \vee X \vee X \end{tikzcd}$$

(iii) $\nabla \circ (\mathrm{id} \vee i) \circ c \simeq * \simeq \nabla \circ (i \vee \mathrm{id}) \circ c$, isto é, os diagramas a seguir comutam a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "*"] & \\ X \vee X \arrow[r, "\nabla\circ(\mathrm{id}\vee i)"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "*"] & \\ X \vee X \arrow[r, "\nabla\circ(i\vee\mathrm{id})"'] & X \end{tikzcd}$$

Também chamamos de co-H-espaço o par (X, c) do co-H-espaço X com comultiplicação c fixada. De modo similar, também chamamos de co-H-grupo a tripla (X, c, i) do co-H-grupo X com as aplicações c e i fixadas.

Proposição 3.8. *Sejam X um espaço e $c\colon X \to X \vee X$ uma aplicação. Então (X, c) é um co-H-espaço se, e somente se, $j \circ c \simeq \Delta$,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "c"] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ X \vee X \arrow[r, hook, "j"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

onde $j\colon X \vee X \to X \times X$ é a inclusão.

Demonstração. Para todo $x \in X$, denotando $c(x) = (c_1(x), c_2(x))$, temos

$$\begin{aligned} &((\nabla \circ (\mathrm{id} \vee *) \circ c) \times (\nabla \circ (* \vee \mathrm{id}) \circ c)) \circ \Delta(x) \\ &= ((\nabla \circ (\mathrm{id} \vee *))(c_1(x), c_2(x)), (\nabla \circ (* \vee \mathrm{id}))(c_1(x), c_2(x))) = (c_1(x), c_2(x)) = j \circ c(x). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $((\nabla \circ (\mathrm{id} \vee *) \circ c) \times (\nabla \circ (* \vee \mathrm{id}) \circ c)) \circ \Delta = j \circ c$.

Se (X, c) é co-H-espaço, temos

$$j \circ c = ((\nabla \circ (\mathrm{id} \vee *) \circ c) \times (\nabla \circ (* \vee \mathrm{id}) \circ c)) \circ \Delta \simeq (\mathrm{id} \times \mathrm{id}) \circ \Delta = \Delta.$$

Agora, suponha que $j \circ c \simeq \Delta$. Note que a projeção na primeira coordenada $\pi_1\colon X \times X \to X$ estende a aplicação $\nabla \circ (\mathrm{id} \vee *)$, de modo que

$$\mathrm{id} = \pi_1 \circ \Delta \simeq \pi_1 \circ j \circ c = \nabla \circ (\mathrm{id} \vee *) \circ c.$$

Provamos $\mathrm{id} \simeq \nabla \circ (* \vee \mathrm{id}) \circ c$ analogamente e concluímos que (X, c) é co-H-espaço. □

A partir da comultiplicação c de um co-H-espaço X, podemos definir, de modo análogo ao feito anteriormente, uma operação binária no conjunto $[X, Y]$ das classes de homotopia de aplicações de X em Y.

Definição 3.9. Seja (X, c) um co-H-espaço. Dadas duas aplicações $f, g\colon X \to Y$, denotaremos por $f + g$ a aplicação $f + g = \nabla \circ (f \vee g) \circ c\colon X \to Y$.

Se $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$, temos $\nabla \circ (f' \vee g') \circ c \simeq \nabla \circ (f \vee g) \circ c$. Desse modo, podemos definir a operação binária $[f] + [g] = [f + g]$ em $[X, Y]$.

A prova da proposição a seguir é análoga à prova da Proposição 3.6.

Proposição 3.10. *Se (X, c) é co-H-espaço, então para todo espaço Y e toda $[f] \in [X, Y]$ temos $[f] + [*] = [f] = [*] + [f]$. Além disso, se (X, c, i) é co-H-grupo, então $([X, Y], +)$ é grupo.*

Perceba que as notações das operações nas Definições 3.5 e 3.9 são iguais. Quando as duas definições podem ser aplicadas, as operações coincidem e, portanto, não há risco de ambiguidade. Mais precisamente, temos:

Proposição 3.11. *Sejam (X, c) um co-H-espaço e (Y, m) um H-espaço. Para quaisquer $f, g, h, k \colon X \to Y$, temos:*

$$(f +_m g) +_c (h +_m k) = (f +_c h) +_m (g +_c k),$$

onde $+_m$ é a operação da Definição 3.5 e $+_c$ é a operação da Definição 3.9.

Demonstração. Por um lado, temos que

$$\begin{aligned}(f +_m g) +_c (h +_m k) &= \nabla_Y \circ ((m \circ (f \times g) \circ \Delta_X) \vee (m \circ (h \times k) \circ \Delta_X)) \circ c \\ &= m \circ \nabla_{Y \times Y} \circ ((f \times g) \vee (h \times k)) \circ (\Delta_X \vee \Delta_X) \circ c.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(f +_c h) +_m (g +_c k) &= m \circ ((\nabla_Y (f \vee h) \circ c) \times (\nabla_Y \circ (g \times k) \circ c)) \circ \Delta_X \\ &= m \circ (\nabla_Y \times \nabla_Y) \circ ((f \vee h) \times (g \vee k)) \circ \Delta_{X \vee X} \circ c.\end{aligned}$$

Por fim, resta provar

$$\nabla_{Y \times Y} \circ ((f \times g) \vee (h \times k)) \circ (\Delta_X \vee \Delta_X) = (\nabla_Y \times \nabla_Y) \circ ((f \vee h) \times (g \vee k)) \circ \Delta_{X \vee X}.$$

Para isso, basta tomar $(a, b) \in X \vee X$ arbitrariamente e notar que

$$\begin{aligned}\nabla_{Y \times Y} \circ ((f \times g) \vee (h \times k)) \circ (\Delta_X \vee \Delta_X)(a, b) &= \nabla_{Y \times Y} \circ ((f \times g) \vee (h \times k))(a, a, b, b) \\ &= \nabla_{Y \times Y}(f(a), g(a), h(b), k(b)) = \begin{cases} (f(a), g(a)), & \text{se } b = *, \\ (h(b), k(b)), & \text{se } a = *, \end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\nabla_Y \times \nabla_Y) \circ ((f \vee h) \times (g \vee k)) \circ \Delta_{X \vee X}(a, b) &= (\nabla_Y \times \nabla_Y) \circ ((f \vee h) \times (g \vee k))(a, b, a, b) \\ &= (\nabla_Y \times \nabla_Y)(f(a), h(b), g(a), k(b)) = \begin{cases} (f(a), g(a)), & \text{se } b = *, \\ (h(b), k(b)), & \text{se } a = *. \end{cases}\end{aligned}$$

□

Corolário 3.12. *Se (X, c) é um co-H-espaço e (Y, m) é um H-espaço, então as operações da Definição 3.5 e da Definição 3.9 em $[X, Y]$ coincidem e são abelianas.*

Demonstração. Com a notação do lema anterior, tomando $g = h = *$, temos

$$[f] +_c [k] = ([f] +_m [*]) +_c ([*] +_m [k]) = ([f] +_c [*]) +_m ([*] +_c [k]) = [f] +_m [k],$$

provando que as operações coincidem, e tomando $f = k = *$, temos

$$[g] +_c [h] = ([*] +_m [g]) +_c ([h] +_m [*]) = ([*] +_c [h]) +_m ([g] +_c [*]) = [h] +_m [g],$$

provando que elas são abelianas. □

3.2 Espaço de Laços e Suspensão

Definição 3.13. Seja Y um espaço. O espaço de caminhos PY é o espaço das aplicações $\alpha\colon I \to Y$ tais que $\alpha(0) = *$, com a topologia compacto-aberto.

O espaço de laços ΩY é o subespaço de PY das aplicações $\alpha\colon I \to Y$ tais que $\alpha(0) = \alpha(1) = *$. Dada uma aplicação $g\colon Y \to Y'$, denotamos por Ωg a aplicação $\Omega g\colon \Omega Y \to \Omega Y'$, dada por $\Omega g(\alpha) = g \circ \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega Y$.

O espaço ΩY também pode ser definido como o espaço das aplicações de S^1 em Y, visto que $S^1 = I/\{0,1\}$.

Uma justificativa de que os espaços da definição acima têm o tipo de homotopia de CW-complexos pode ser encontrada em [15].

Proposição 3.14. *Dado um espaço Y, considere $m\colon \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ a aplicação dada por*

$$m(\alpha,\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ \beta(2t-1), & \text{se } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

e $i\colon \Omega Y \to \Omega Y$ a aplicação dada por

$$i(\alpha)(t) = \alpha(1-t),$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega Y$ e $t \in I$. Então $(\Omega Y, m, i)$ é um H-grupo.

Demonstração. Para provar a proposição, basta exibir as homotopias exigidas pela Definição 3.1. A continuidade das homotopias a seguir segue do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3], e para verificar que são realmente as homotopias desejadas, basta avaliar em $t = 0$ e $t = 1$.

- Uma homotopia $H_1\colon \Omega Y \times I \to \Omega Y$ entre $\mathrm{id}_{\Omega Y}$ e $m \circ (\mathrm{id}_{\Omega Y} \times *) \circ \Delta$ é dada por

$$H_1(\alpha,t)(s) = \begin{cases} \alpha((1+t)s), & \text{se } 0 \le s \le 1/(1+t), \\ *, & \text{se } 1/(1+t) \le s \le 1. \end{cases}$$

  Note que definimos a homotopia exibindo uma lei para o laço $H_1(\alpha,t)$. A homotopia $H_1'\colon \mathrm{id}_{\Omega Y} \simeq m \circ (* \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) \circ \Delta$ é definida analogamente.

- Uma homotopia $H_2\colon \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \times I \to \Omega Y$ entre $m \circ (m \times \mathrm{id}_{\Omega Y})$ e $m \circ (\mathrm{id}_{\Omega Y} \times m)$ é dada por

$$H_2(\alpha,\beta,\gamma,t)(s) = \begin{cases} \alpha(4s/(1+t)), & \text{se } 0 \le s \le (t+1)/4, \\ \beta(4s-1-t), & \text{se } (t+1)/4 \le s \le (t+2)/4 \\ \gamma((4s-t-2)/(2-t)), & \text{se } (t+2)/4 \le s \le 1. \end{cases}$$

- Uma homotopia $H_3\colon \Omega Y \times I \to \Omega Y$ entre $*$ e $m \circ (\mathrm{id}_{\Omega Y} \times i) \circ \Delta$ é dada por

$$H_3(\alpha,t)(s) = \begin{cases} \alpha(2ts), & \text{se } 0 \le s \le 1/2, \\ \alpha(2t(1-s)), & \text{se } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

  Uma homotopia $H_3'\colon * \simeq m \circ (\mathrm{id}_{\Omega Y} \times i) \circ \Delta$ é definida analogamente. □

As definições das homotopias acima poderiam ter sido simplificadas usando a seguinte notação: dados $\alpha \in Y^I$ e $t, s \in I$, denotamos por $t\alpha$ e $-\alpha$ as funções contínuas dadas por

$$t\alpha(s) = \alpha(ts)$$
$$(-\alpha)(s) = \alpha(1-s)$$

para todo $s \in I$. Em alguns casos, é útil definir $t\alpha$ como acima, porém tomando $t > 1$. Nesse caso, basta considerar $[0, 1/t] \subset I$ como domínio de $t\alpha$.

Definição 3.15. Seja X um espaço. O cilindro reduzido $X \ltimes I$ é o espaço quociente

$$X \ltimes I = \frac{X \times I}{\{*\} \times I}.$$

O cone reduzido CX é o espaço quociente

$$CX = \frac{X \times I}{(X \times \{1\}) \cup (\{*\} \times I)}.$$

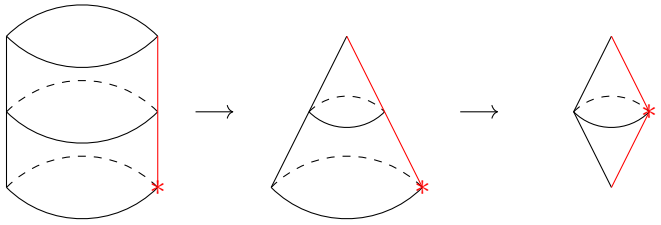
A inclusão de X em CX é a aplicação $i\colon X \to CX$ dada por $i(a) = \langle a, 0\rangle$.
A suspensão reduzida ΣX é o espaço quociente

$$\Sigma X = \frac{X \times I}{(X \times \{0,1\}) \cup (\{*\} \times I)}.$$

Dada uma aplicação $f\colon X \to X'$, denotamos por $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma X'$ a aplicação dada por $\Sigma f\langle a, t\rangle = \langle f(a), t\rangle$.

Note que $X \ltimes I$, CX e ΣX são obtidos como quocientes sucessivos de $X \times I$, pois temos $X \ltimes I = X \times I/\{*\} \times I$, $CX = X \ltimes I/X \times \{1\}$ e $\Sigma X = CX/X \times \{0\} = (X \ltimes I/X \times \{1\})/X \times \{0\}$, como na figura a seguir.

Figura 3.1: Construção do cone e da suspensão a partir do cilindro



Fonte: Elaborado pelo autor

A importância das suspensões se torna mais evidente ao notar que $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$(uma prova desse fato pode ser encontrada em [1, Proposição 2.3.9]). Desse modo, as esferas são suspensões sucessivas de S^0, isto é, de um espaço discreto com dois elementos, e podemos pensar nas suspensões como uma generalização das esferas. Além disso, elas são protagonistas de teoremas importantes, como o Teorema da Suspensão Freudenthal [10, Corolário 4.24], que diz que, dados um CW-complexo X conexo por caminhos e um inteiro $n > 1$, se $\pi_i(X) = 0$ para todo $i < n$, então há isomorfismo $\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X)$ para $i < 2n-1$ e há um epimorfismo $\pi_{2n-1}(X) \to \pi_{2n}(\Sigma X)$.

Uma definição alternativa da suspensão é sugerida na proposição a seguir:

Proposição 3.16. *A suspensão ΣX de um espaço X é homeomorfa ao smash $X \wedge S^1$.*

Demonstração. Por definição, $\Sigma X = X \times I/((X \times \{0,1\}) \cup (\{*\} \times I))$, isto é, $\Sigma X = X \times I/{\sim_\Sigma}$ onde $\sim_\Sigma$ é dada por

$$(x,0) \sim_\Sigma (*,0) \sim_\Sigma (*,t) \sim_\Sigma (*,1) \sim_\Sigma (x,1),$$

para todo $x \in X$ e $t \in I$.

Tomando $S^1 = I/\{0,1\}$, podemos considerar também $X \times S^1$ como o espaço quociente $X \times I/{\sim}$ onde $\sim$ é dada por $(x,0) \sim (x,1)$ para todo $x \in X$. Assim, o quociente $X \wedge S^1 = X \times S^1/X \vee S^1$ pode ser considerado como $X \times I/{\sim_\wedge}$ onde $\sim_\wedge$ é dada por $(x,0) \sim_\wedge (x,1)$, $(x,0) \sim_\wedge (*,0)$ (pois $0 = *_I$) e $(*,t) \sim_\wedge (*,0)$, isto é, $\sim_\wedge$ é dada por

$$(x,0) \sim_\wedge (*,0) \sim_\wedge (*,t) \sim_\wedge (*,1) \sim_\wedge (x,1),$$

para todo $x \in X$ e $t \in I$. Logo, $\sim_\Sigma$ coincide com $\sim_\wedge$ e temos $\Sigma X \approx X \wedge S^1$. □

Proposição 3.17. *Dado um espaço X, considere $c\colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ a aplicação dada por*

$$c\langle a,t\rangle = \begin{cases} (\langle a,2t\rangle,*) & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ (*,\langle a,2t-1\rangle) & \text{se } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

e $j\colon \Sigma X \to \Sigma X$ a aplicação dada por

$$j\langle a,t\rangle = \langle a,1-t\rangle,$$

para todo $\langle a,t\rangle \in \Sigma X$. Então $(\Sigma X, c, j)$ é um co-H-grupo.

Demonstração. Para provar a proposição, basta exibir as homotopias exigidas pela Definição 3.7. A continuidade das homotopias a seguir seguem do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3], e para verificar que são realmente as homotopias desejadas, basta avaliar em $t = 0$ e $t = 1$.

- Uma homotopia $H_1\colon \Sigma X \times I \to \Sigma X$ entre $\mathrm{id}_{\Sigma X}$ e $\nabla \circ (\mathrm{id}_{\Sigma X} \vee *) \circ c$ é dada por

$$H_1(\langle a,s\rangle,t) = \begin{cases} \langle a,(1+t)s\rangle, & \text{se } 0 \le s \le 1/(1+t), \\ *, & \text{se } 1/(1+t) \le s \le 1. \end{cases}$$

  A homotopia $H_1'\colon \mathrm{id}_{\Sigma X} \simeq \nabla \circ (* \vee \mathrm{id}_{\Sigma X}) \circ c$ é definida analogamente.

- Uma homotopia $H_2\colon \Sigma X \times I \to \Sigma X \vee \Sigma X \vee \Sigma X$ entre $(c \vee \mathrm{id}_{\Sigma X}) \circ c$ e $(\mathrm{id}_{\Sigma X} \vee c) \circ c$ é dada por

$$H_2(\langle a,s\rangle,t) = \begin{cases} (\langle a,4s/(1+t)\rangle,*,*), & \text{se } 0 \le s \le (t+1)/4, \\ (*,\langle a,\beta(4s-1-t)\rangle,*), & \text{se } (t+1)/4 \le s \le (t+2)/4, \\ (*,*,\langle a,(4s-t-2)/(2-t)\rangle), & \text{se } (t+2)/4 \le s \le 1. \end{cases}$$

- Uma homotopia $H_3\colon \Sigma X \times I \to \Sigma X$ entre $*$ e $\nabla \circ (\mathrm{id}_{\Sigma X} \vee i) \circ c$ é dada por

$$H_3(\langle a,s\rangle,t) = \begin{cases} \langle a,2ts\rangle, & \text{se } 0 \le s \le 1/2, \\ \langle a,2t(1-s)\rangle, & \text{se } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

  Uma homotopia $H_3'\colon \nabla \circ (i \vee \mathrm{id}_{\Sigma X}) \circ c$ é definida analogamente. □

Finalmente, definimos os grupos de homotopia de um espaço X:

Definição 3.18. Dados X um espaço e $n > 0$ um inteiro, o grupo $[S^n, X] = [\Sigma S^{n-1}, X]$ será denotado por $\pi_n(X)$ e será chamado n-ésimo grupo de homotopia de X. Também, denotaremos por $\pi_0(X)$ o conjunto $[S^0, X]$.

A partir dos grupos de homotopia, temos uma forma útil de relacionar dois espaços:

Definição 3.19. Dizemos que uma aplicação $f\colon X \to Y$ é uma n-equivalência se a induzida $f_*\colon \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ é bijetora para $0 \leq i < n$ e sobrejetora para $i = n$. Dizemos que f é uma equivalência fraca se $f_*\colon \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ é bijetora para todo $i \geq 0$.

Se $f\colon X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, com inversa homotópica $g\colon Y \to X$, prova-se facilmente que $g_*\colon \pi_n(Y) \to \pi_n(X)$ é inversa de $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ para cada $n \geq 0$, portanto, f é equivalência fraca. No entanto, como o nome sugere, uma equivalência fraca não é necessariamente uma equivalência de homotopia. Porém, no caso dos CW-complexos, o teorema a seguir, provado em [21, Teorema 1], nos diz que essa recíproca vale.

Teorema 3.20 (Whitehead)**.** *Sejam X e Y CW-complexos conexos por caminhos e $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Se f é uma equivalência fraca então f é uma equivalência de homotopia.*

Uma demonstração completa desse teorema exige que trabalhemos com a estrutura dos CW-complexos diretamente. Para evitar isso, utilizaremos o lema a seguir (ver [1, Lemas 2.4.5 e 4.5.7]).

Lema 3.21. *Sejam B e Y espaços quaisquer, $e\colon B \to Y$ uma equivalência fraca e (X, A) um par CW. Tome $j\colon A \hookrightarrow X$ a inclusão e suponha que existam $f\colon X \to Y$ e $g\colon A \to B$ tais que $e \circ g \simeq_L f \circ j$, para alguma homotopia $L\colon A \times I \to Y$, de modo que o quadrado a seguir comuta a menos de homotopia:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "j"'] & B \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] & Y \end{tikzcd}$$

Então, existem uma extensão $\tilde{g}\colon X \to B$ de g e uma extensão $F\colon X \times I \to Y$ de L tais que $e \circ \tilde{g} \simeq_F f$.

A partir desse lema, provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.22. *Se $e\colon B \to Y$ é uma equivalência fraca, então a sua induzida $e_*\colon [X, B] \to [X, Y]$ é uma bijeção para todo CW-complexo X.*

Demonstração. Primeiro, provemos que e_* é sobrejetora. Para isso, tome $[f] \in [X, Y]$ arbitrária, $A = \{*\} \subset X$, $g\colon A \to B$ a aplicação constante e $j\colon A \hookrightarrow X$ a inclusão (que, nesse caso, também é uma aplicação constante). Observe no diagrama abaixo que $e \circ g = * = f \circ j$ e, assim, temos pelo lema anterior que existe $\tilde{g}\colon X \to B$ tal que $e \circ \tilde{g} \simeq f$, isto é, $e_*[\tilde{g}] = [f]$. Isso mostra que e_* é sobrejetora.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "j"'] & B \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{g}"] & Y \end{tikzcd}$$

Agora, provemos que e_* é injetora. Para isso, tome $[g_0], [g_1] \in [X, B]$ tais que $e_*[g_0] = e_*[g_1]$ e provemos que $[g_0] = [g_1]$. Como $e_*[g_0] = e_*[g_1]$, temos que existe uma homotopia $F\colon X \times I \to B$ tal que $e \circ g_0 \simeq_F e \circ g_1$. Denote $A' = (X \times \{0,1\}) \cup (\{*\} \times I)$ e defina $G\colon A' \to B$ por

$$G(x,0) = g_0(x), \qquad G(*,t) = *, \qquad G(x,1) = g_1(x),$$

para todo $x \in X$ e $t \in I$. Como

$$F(x,0) = e \circ g_0(x), \qquad F(*,t) = * = e(*), \qquad F(x,1) = e \circ g_1(x),$$

para todo $x \in X$ e $t \in I$, temos que $F \circ j' = e \circ G$, onde $j'\colon A' \hookrightarrow X \times I$ é a inclusão. Assim, considerando o par CW $(X \times I, A')$, temos pelo lema anterior que existe uma aplicação $\tilde{G}\colon X \times I \to B$ tal que $\tilde{G}|_{A'} = G$, conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "j'"'] & B \arrow[d, "e"] \\ X \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & Y \end{tikzcd}$$

Como

$$\tilde{G}(x,0) = G(x,0) = g_0(x), \qquad \tilde{G}(*,t) = G(*,t) = *, \qquad \tilde{G}(x,1) = G(x,1) = g_1(x),$$

para todo $x \in X$ e $t \in I$, temos que $\tilde{G}$ é homotopia entre g_0 e g_1 e concluímos $[g_0] = [g_1]$, como desejado. □

Finalmente, provamos o Teorema de Whitehead (ver p. 33):

Demonstração do Teorema 3.20. Já comentamos que se $f\colon X \to Y$ é equivalência de homotopia, então f é equivalência fraca. Por outro lado, se f é equivalência fraca, a proposição anterior nos diz que a induzida $f_*\colon [Z, X] \to [Z, Y]$ é bijeção para todo CW-complexo Z. Em particular, tomando $Z = Y$, temos que $[\mathrm{id}_Y] \in [Y, Y] = \mathrm{Im}(f_*)$, e concluímos que existe $[g] \in [Y, X]$ tal que $f_*[g] = [\mathrm{id}_Y]$, isto é, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Agora, considere $Z = X$. Como $f \circ g \circ f \simeq \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X$, temos que $f_*[g \circ f] = f_*[\mathrm{id}_X]$. Além disso, como $f_*\colon [X, X] \to [X, Y]$ é injetora, temos $[g \circ f] = [\mathrm{id}_X]$, isto é, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

Isso prova que a aplicação g é inversa homotópica de f e, portanto, f é equivalência de homotopia. □

Na demonstração da proposição a seguir, utilizaremos [17, Teorema 5.12]. Esse resultado exige que consideremos, para cada espaço X, o seu espaço compactamente gerado associado, denotado $k(X)$, que é igual a X como conjunto, porém possui uma topologia (possivelmente) diferente. No entanto, não faremos distinção entre X e $k(X)$.

Isso não nos trás problemas, pois como cada espaço X tem o tipo de homotopia de um CW-complexo X' e os CW-complexos são compactamente gerados segundo [20, p. 50], temos que $X \simeq X' = k(X')$. Assim, temos que os grupos $[X, \Omega Y]$, $[k(X'), \Omega k(Y')]$, $[k(X'), k((\Omega k(Y'))')]$ são todos isomorfos (análogo para $[\Sigma X, Y]$). Portanto, na demonstração da proposição a seguir, podemos assumir que cada espaço X denota o CW-complexo X'.

Proposição 3.23. *Sejam X e Y espaços. Os grupos $[X, \Omega Y]$ e $[\Sigma X, Y]$ são isomorfos.*

Demonstração. Defina uma aplicação κ do espaço das aplicações $\Sigma X \to Y$ no espaço das aplicações $X \to \Omega Y$ por

$$\kappa(f)(x)(t) = f\langle x, t\rangle.$$

para cada $f\colon \Sigma X \to Y$, $x \in X$ e $t \in I$.

Considerando $\Sigma X = X \wedge S^1$ e ΩY como o espaço de aplicações $S^1 \to Y$, κ é o homeomorfismo dado em [17, Teorema 5.12].

Queremos agora definir uma induzida $\kappa_*\colon [\Sigma X, Y] \to [X, \Omega Y]$ por $\kappa_*([f]) = [\kappa(f)]$. Para isso, devemos provar que se $[f] = [g]$, isto é, se existe uma homotopia $H\colon \Sigma X \times I \to Y$ de f em g, então $[\kappa(f)] = [\kappa(g)]$, isto é, $\kappa(f)$ e $\kappa(g)$ são homotópicas.

Denote por $h_t\colon \Sigma X \to Y$ as aplicações dadas por $h_t(x) = H(x, t)$. Definiremos a homotopia desejada entre $\kappa(f)$ e $\kappa(g)$ com a associação

$$(x, t) \mapsto (x, h_t) \mapsto (x, \kappa(h_t)) \mapsto \kappa(h_t)(x).$$

A continuidade da primeira e da terceira setas já foi justificada na Seção 2.2. A continuidade da segunda seta segue da continuidade de κ. A verificação de que essa associação determina uma homotopia de $\kappa(f)$ em $\kappa(g)$ é direta.

Para provar que κ_* é bijetora, definimos $(\kappa^{-1})_*$ a partir de κ^{-1} de modo análogo ao feito com κ_* e verificamos facilmente que $(\kappa^{-1})_* = \kappa_*^{-1}$.

Por fim, resta provar que κ_* é homomorfismo. Para isso, tome $f, g\colon \Sigma X \to Y$ arbitrárias. Por um lado, temos:

$$\begin{aligned}
\kappa(f+g)(x)(t) &= (\kappa(\nabla \circ (f \vee g) \circ c))(x)(t) = (\nabla \circ (f \vee g) \circ c)\langle x, t\rangle \\
&= \begin{cases} \nabla \circ (f \vee g)(\langle x, 2t\rangle, *), & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ \nabla \circ (f \vee g)(*, \langle x, 2t-1\rangle), & \text{se } 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} f\langle x, 2t\rangle, & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ g\langle x, 2t-1\rangle, & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
(\kappa(f) + \kappa(g))(x)(t) &= (m \circ (\kappa(f) \times \kappa(g)) \circ \Delta)(x)(t) = m(\kappa(f)(x), \kappa(g)(x))(t) \\
&= \begin{cases} \kappa(f)(x)(2t), & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ \kappa(g)(x)(2t-1), & \text{se } 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} f\langle x, 2t\rangle, & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ g\langle x, 2t-1\rangle, & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $\kappa(f+g) = \kappa(f) + \kappa(g)$ e, consequentemente, $\kappa_*([f] + [g]) = \kappa_*([f]) + \kappa_*([g])$, isto é, κ_* é homomorfismo de grupos. □

Definição 3.24. Os isomorfismos κ_* e κ_*^{-1} da proposição anterior são chamados *isomorfismos adjoint.*

Os isomorfismos adjoint são úteis no cálculo de grupos de homotopia $\pi_n(\Omega Y)$, onde temos

$$\pi_n(\Omega Y) = [S^n, \Omega Y] = [\Sigma S^n, Y] = [S^{n+1}, Y] = \pi_{n+1}(Y).$$

Note que, na proposição a seguir, usamos a mesma notação para diferentes isomorfismos adjoint.

Proposição 3.25. *Dadas $f\colon X' \to X$, $g\colon Y \to Y'$ e $h\colon \Sigma X \to Y$ aplicações, temos:*

- $\kappa(h) \circ f = \kappa(h \circ \Sigma f)$,
- $f^* \circ \kappa_* = \kappa_* \circ (\Sigma f)^*$,
- $(\Omega g) \circ \kappa(h) = \kappa(g \circ h)$,
- $(\Omega g)_* \circ \kappa_* = \kappa_* \circ g_*$.

Demonstração. Basta notar, em cada item, que as aplicações são iguais ponto a ponto. □

Assim, temos que os diagramas a seguir comutam:

$$\begin{tikzcd} {[\Sigma X, Y]} \arrow[r, "(\Sigma f)^*"] \arrow[d, "\kappa_*"] & {[\Sigma X', Y]} \arrow[d, "\kappa_*"] \\ {[X, \Omega Y]} \arrow[r, "f^*"] & {[X', \Omega Y]} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[\Sigma X, Y]} \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\kappa_*"] & {[\Sigma X, Y']} \arrow[d, "\kappa_*"] \\ {[X, \Omega Y]} \arrow[r, "(\Omega g)_*"] & {[X, \Omega Y']} \end{tikzcd}$$

Corolário 3.26. *Se*

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots$$

é uma sequência coexata,

$$\Sigma X_1 \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma X_2 \xrightarrow{\Sigma f_2} \Sigma X_3 \longrightarrow \cdots$$

também é.

Demonstração. Sabemos que para qualquer espaço Z, a sequência

$$\cdots \longrightarrow [X_3, Z] \xrightarrow{f_2^*} [X_2, Z] \xrightarrow{f_1^*} [X_1, Z]$$

é exata. Em particular,

$$\cdots \longrightarrow [X_3, \Omega Z] \xrightarrow{f_2^*} [X_2, \Omega Z] \xrightarrow{f_1^*} [X_1, \Omega Z]$$

é exata e, pela proposição anterior, temos que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & {[\Sigma X_3, Z]} \arrow[r, "(\Sigma f_2)^*"] \arrow[d, "\kappa_*"] & {[\Sigma X_2, Z]} \arrow[r, "(\Sigma f_1)^*"] \arrow[d, "\kappa_*"] & {[\Sigma X_1, Z]} \arrow[d, "\kappa_*"] \\ \cdots \arrow[r] & {[X_3, \Omega Z]} \arrow[r, "f_2^*"] & {[X_2, \Omega Z]} \arrow[r, "f_1^*"] & {[X_1, \Omega Z]} \end{tikzcd}$$

Assim, $\{\kappa_*\colon [\Sigma X_i, Z] \to [X_i, \Omega Z]\}$ é uma aplicação de sequências. Como cada κ_* possui inversa κ_*^{-1}, temos pela Proposição 2.13 que

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma X_3, Z] \xrightarrow{(\Sigma f_2)^*} [\Sigma X_2, Z] \xrightarrow{(\Sigma f_1)^*} [\Sigma X_1, Z]$$

é exata e, portanto, $\Sigma X_1 \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma X_2 \xrightarrow{\Sigma f_2} \Sigma X_3 \longrightarrow \cdots$ é coexata. □

Corolário 3.27. *Se*

$$\cdots \longrightarrow X_3 \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1$$

é uma sequência exata,

$$\cdots \longrightarrow \Omega X_3 \xrightarrow{\Omega f_3} \Omega X_2 \xrightarrow{\Omega f_2} \Omega X_1$$

também é.

Demonstração. Sabemos que para qualquer espaço Z, a sequência

$$\cdots \longrightarrow [Z, X_3] \xrightarrow{f_{3*}} [Z, X_2] \xrightarrow{f_{2*}} [Z, X_1]$$

é exata. Em particular,

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma Z, X_3] \xrightarrow{f_{3*}} [\Sigma Z, X_2] \xrightarrow{f_{2*}} [\Sigma Z, X_1]$$

é exata e, pela proposição anterior, temos que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {[\Sigma Z, X_3]} \arrow[r, "f_{3*}"] \arrow[d, "\kappa_*"] & {[\Sigma Z, X_2]} \arrow[r, "f_{2*}"] \arrow[d, "\kappa_*"] & {[\Sigma Z, X_1]} \arrow[d, "\kappa_*"] \\
\cdots \arrow[r] & {[Z, \Omega X_3]} \arrow[r, "(\Omega f_3)_*"] & {[Z, \Omega X_2]} \arrow[r, "(\Omega f_2)_*"] & {[Z, \Omega X_1]}
\end{tikzcd}$$

Assim, $\{\kappa_* \colon [\Sigma Z, X_i] \to [Z, \Omega X_i]\}$ é uma aplicação de sequências. Como cada κ_* possui inversa κ_*^{-1}, temos pela Proposição 2.13 que

$$\cdots \longrightarrow [Z, \Omega X_3] \xrightarrow{(\Omega f_3)_*} [Z, \Omega X_2] \xrightarrow{(\Omega f_2)_*} [Z, \Omega X_1]$$

é exata e, portanto,

$$\cdots \longrightarrow \Omega X_3 \xrightarrow{\Omega f_3} \Omega X_2 \xrightarrow{\Omega f_2} \Omega X_1$$

é exata. $\square$

4 Cofibrações e Fibrações

A propriedade de extensão de homotopia, definida no Capítulo 2, nos permite obter novas homotopias a partir de uma já conhecida. Naturalmente, isso a torna muito importante em Teoria de Homotopia. Nesse capítulo, discutimos as cofibrações, que generalizam essa propriedade e, consequentemente, herdam sua relevância. Apresentamos também as fibrações, que dualizam as cofibrações e têm utilidade semelhante.

4.1 Cofibrações

Definição 4.1. Uma aplicação $f\colon A \to X$ é uma *cofibração* quando dados um espaço Z, uma aplicação $h\colon X \to Z$ e uma homotopia $g_t\colon A \to Z$ tais que $h \circ f = g_0$, existe uma homotopia $h_t\colon X \to Z$ tal que $h_0 = h$ e $h_t \circ f = g_t$ para todo $t \in I$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "g_t"] & \\ X \arrow[r, "h"] \arrow[r, dashed, shift right, "h_t"'] & Z \end{tikzcd}$$

O espaço $Q = X/f(A)$ é chamado *cofibra* de f e a sequência

$$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{q} Q$$

onde q é a projeção, é também chamada cofibração.

Lembre que, quando conveniente, se $Q \approx X/f(A)$ consideramos $Q = X/f(A)$. Nesse caso, se $h\colon X/f(A) \to Q$ é um homeomorfismo, dizemos que a sequência

$$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h \circ q} Q$$

é uma cofibração.

A propriedade da extensão de homotopia em um par pode ser redefinida usando cofibração. Um par de espaços (X, A), com $A \subset X$, tem a propriedade da extensão de homotopia se a inclusão $i\colon A \hookrightarrow X$ é uma cofibração. Assim, a Proposição 2.3 nos diz que a inclusão $i\colon A \hookrightarrow X$ de um subcomplexo A em um CW-complexo X é um exemplo de cofibração.

O resultado a seguir nos dá outro exemplo importante de cofibração.

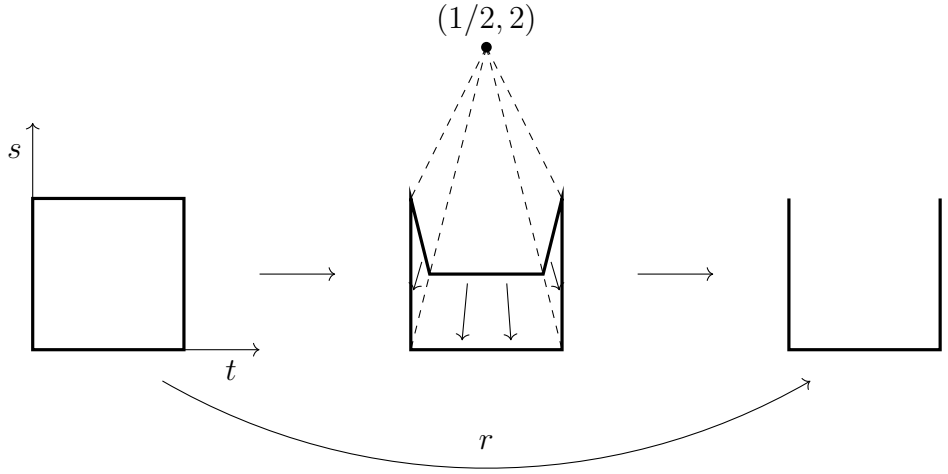
Proposição 4.2. *Para todo espaço A, a inclusão $i\colon A \hookrightarrow CA$ é uma cofibração.*

Demonstração. Sejam Z um espaço, $g_t\colon A \to Z$ uma homotopia e $h\colon CA \to Z$ uma aplicação tal que $h \circ i = g_0$. Queremos definir uma homotopia $h_t\colon CA \to Z$ tal que $h_0 = h$ e $h_t \circ i = g_t$ para todo $t \in I$.

Para isso, será útil definir uma aplicação $r\colon I \times I \to (\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0\})$ por

$$r(s,t) = \begin{cases} (0, 2 + (2-t)/(2s-1)), & \text{se } s \leq t/4, \\ (1/2 + (2s-1)/(2-t), 0), & \text{se } t/4 \leq s \leq 1 - t/4, \\ (1, 2 - (2-t)/(2s-1)), & \text{se } 1 - t/4 \leq s. \end{cases}$$

Figura 4.1: Construção da aplicação r



Fonte:Elaborado pelo autor

Agora, defina $H''\colon A \times ((\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0\})) \to Z$ por

$$H''(a,0,t) = g_t(a), \qquad H''(a,s,0) = h\langle a,s\rangle, \qquad H''(a,1,t) = *.$$

A verificação de que r e H'' foram bem definidas é direta e a continuidade segue do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3]. Utilizando r e H'', definimos $H'\colon A \times I \times I \to Z$ por $H'(a,s,t) = H''(a, r(s,t))$.

Por fim, como $H'(A \times \{1\} \times I) = *$, temos que H' induz uma homotopia $H\colon CA \times I \to Z$. Como $H(i(a),t) = H(\langle a,0\rangle, t) = g_{2+(2-t)/(-1)}(a) = g_t(a)$, temos que H determina a homotopia h_t desejada. □

Um exemplo mais simples de cofibração é a inclusão $i\colon \{*\} \hookrightarrow X$ do ponto base em um espaço qualquer. Para justificar esse fato, tome $h\colon X \to Z$ uma aplicação e $g_t\colon \{*\} \to Z$ uma homotopia com $g_0(*) = h(i(*))$. Como g_t só pode ser a aplicação constante, basta definir $h_t = h$ para todo $t \in I$ para obter uma homotopia tal que $h_t(i(*)) = * = g_t(*)$. Essa justificativa não seria possível se permitíssemos que g_t fosse uma homotopia livre, como fazemos na definição a seguir:

Definição 4.3. Uma função contínua $f\colon A \to X$ é uma *cofibração livre* quando dados um espaço topológico arbitrário Z, uma função contínua $h\colon X \to Z$ e uma homotopia livre $g_t\colon A \to Z$ tais que $h \circ f = g_0$, existe uma homotopia livre $h_t\colon X \to Z$ tal que $h_0 = h$ e $h_t \circ f = g_t$ para todo $t \in I$.

Essa é, na verdade, a definição usual de cofibração na categoria dos espaços topológicos (não necessariamente baseados). Adicionamos a palavra "livre" apenas para não precisar chamar de "cofibração baseada" as cofibrações que utilizamos com mais frequência nesse texto. Novamente, a Proposição 2.3 nos diz que a inclusão $i\colon A \hookrightarrow X$ de um subcomplexo A em um CW-complexo X é um exemplo de cofibração livre. Em particular, a inclusão $\{*\} \hookrightarrow X$ é uma cofibração livre para todo CW-complexo baseado X. Um nome para essa propriedade é dado a seguir:

Definição 4.4. Dizemos que um espaço topológico baseado X tem ponto base não degenerado quando a inclusão $\{*\} \hookrightarrow X$ é uma cofibração livre.

A partir daqui, vamos assumir que todos os espaços tenham ponto base não degenerado. Essa propriedade é bastante útil, porém não restringe tanto os espaços com os quais podemos trabalhar, visto que já estamos assumindo que todo espaço tem o tipo de homotopia de um CW-complexo e, portanto, tem o tipo de homotopia de um espaço com ponto base não degenerado.

A proposição a seguir pode ser encontrada em [18, Proposição 5.24].

Proposição 4.5. *Se $A \to X$ e $B \to Y$ são cofibrações livres, então*

$$(A \times Y) \cup (X \times B) \to X \times Y$$

também é uma cofibração livre.

Lembrando que $X \vee Y = (X \times \{*\}) \cup (\{*\} \times Y)$, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 4.6. *Para quaisquer espaços X e Y, a inclusão $j\colon X \vee Y \to X \times Y$ é uma cofibração.*

Isso nos dá uma consequência interessante para os H-espaços.

Corolário 4.7. *Um espaço X é um H-espaço se, e somente se, existe uma aplicação $m\colon X \times X \to X$ tal que $m \circ j = \nabla$, onde $j\colon X \vee X \to X \times X$ é a inclusão.*

Demonstração. Suponha que X é um H-espaço com multiplicação $m'\colon X \times X \to X$. Pela Proposição 3.4, existe uma homotopia $g_t\colon X \vee X \to X$ com $g_0 = m' \circ j$ e $g_1 = \nabla$. Como j é cofibração, existe uma homotopia $h_t\colon X \times X \to X$ tal que $h_t \circ j = g_t$ para todo $t \in I$. Em particular, denotando $m = h_1$, temos que $m \circ j = g_1 = \nabla$.

$$\begin{tikzcd}
X \vee X \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "g_t"] & \\
X \times X \arrow[r, shift left, "m'"] \arrow[r, shift right, dashed, "h_t"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, se existe m tal que $m \circ j = \nabla$, temos em particular que $m \circ j \simeq \nabla$ e o resultado segue, novamente, da Proposição 3.4. $\square$

Os exemplos de cofibrações dados até agora foram de inclusões. O resultado a seguir nos diz que, a menos de homeomorfismo, esse é sempre o caso.

Proposição 4.8. *Toda cofibração $f\colon A \to X$, ao restringir o contradomínio, é um homeomorfismo entre A e sua imagem $f(A)$.*

Demonstração. Como $CA \simeq *$, temos que a inclusão $i\colon A \hookrightarrow CA$ é homotópica a aplicação constante $*_A\colon A \to CA$, isto é, existe uma homotopia $g_t\colon A \to CA$ de $*_A$ em i.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g_t"] & \\ X \arrow[r, shift left, "*_X"] \arrow[r, shift right, "h_t"'] & CA \end{tikzcd}$$

Denotando por $f'\colon A \to f(A)$, $h_1'\colon f(A) \to h_1(f(A)) = i(A)$ e $i'\colon A \to i(A)$ as restrições de domínio e contradomínio de f, h_1 e i respectivamente, temos $h_1' \circ f' = i'$.

Como i' é um homeomorfismo, temos que f' é injetora. Como f' claramente também é sobrejetora, temos que f' é bijetora e, portanto, possui função inversa (não necessariamente contínua). Por fim, como i' é homeomorfismo, temos que $h_1' \circ f' = i'$ implica $i'^{-1} \circ h_1' \circ f' = \mathrm{id}_A$, isto é, $i'^{-1} \circ h_1'$ é a inversa de f'. Como $i'^{-1} \circ h_1'$ é uma aplicação (contínua), concluímos que f' é um homeomorfismo. □

Assim, toda cofibração $f\colon A \to X$ pode também ser pensada como uma inclusão do espaço $A \approx f(A)$ no espaço X. Por isso, a homotopia h_t da definição de cofibração também pode ser pensada como uma extensão da homotopia g_t.

Proposição 4.9. *Se $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{q} X/f(A)$ é uma cofibração e A é contrátil, então q é uma equivalência de homotopia.*

Demonstração. Como A é contrátil, existe uma homotopia $g_t\colon A \to A$ com $g_0 = \mathrm{id}_A$ e $g_1 = *$. Assim, temos que $f \simeq_{f \circ g_t} *$ e, como f é cofibração, temos que existe uma homotopia $h_t\colon X \to X$ com $h_0 = \mathrm{id}_X$ e $h_t \circ f = f \circ g_t$. Em particular, $h_1 \circ f = f \circ g_1 = *$, isto é, $h_1(f(A)) = *$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f \circ g_t"] & \\ X \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, shift right, "h_t"'] & X \end{tikzcd}$$

Logo, h_1 induz $h_1'\colon X/A \to X$ tal que

$$h_1' \circ q = h_1 \simeq h_0 = \mathrm{id}_X.$$

Por outro lado, como $h_t \circ f = f \circ g_t$, temos que $h_t(f(A)) = f(g_t(A)) \subset f(A)$ e podemos definir uma homotopia $\tilde{h}_t\colon X/f(A) \to X/f(A)$ por $\tilde{h}_t\langle x\rangle = \langle h_t(x)\rangle$. Note que $\tilde{h}_0\langle x\rangle = \langle h_0(x)\rangle = \langle x\rangle$, isto é, $\tilde{h}_0 = \mathrm{id}_{X/A}$. Além disso, $\tilde{h}_1\langle x\rangle = \langle h_1(x)\rangle = \langle h_1'\langle x\rangle\rangle = q(h_1'\langle x\rangle)$, isto é, $\tilde{h}_1 = q \circ h_1'$. Logo, $\mathrm{id}_{X/A} \simeq_{\tilde{h}_t} q \circ h_1'$, e concluímos que q é equivalência de homotopia, com inversa homotópica h_1'. □

Definição 4.10. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. O *mapping cylinder* de f, denotado por M_f, é o espaço quociente $((X \ltimes I) \vee Y)/\sim$, onde a relação $\sim$ é dada por $((x, 0), *) \sim (*, f(x))$, para todo $x \in X$.

Proposição 4.11. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Tome $f'\colon X \to M_f$ e $f''\colon M_f \to Y$ as aplicações dadas por $f'(x) = \langle\langle x, 1\rangle, *\rangle$, $f''\langle\langle x, t\rangle, *\rangle = f(x)$ e $f''\langle *, y\rangle = y$. Então:*

1. $f = f'' \circ f'$,

2. *f' é cofibração,*

3. *f'' é equivalência de homotopia.*

Demonstração. Para provar o item 1, basta verificar que $f'' \circ f'(x) = f''\langle\langle x, 1\rangle, *\rangle = f(x)$ para todo $x \in X$.

Para provar o item 2, tome $h\colon M_f \to Z$ uma aplicação e $g_t\colon X \to Z$ uma homotopia tal que $h \circ f' = g_0$. Queremos provar que existe uma homotopia $h_t\colon M_f \to Z$ tal que $h_t \circ f' = g_t$ para todo $t \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, "g_t"] & \\ M_f \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, dashed, "h_t"'] & Z \end{tikzcd}$$

Defina $H''\colon X \times ((\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0\})) \to Z$ por

$$H''(x,0,t) = h\langle *, f(x)\rangle, \qquad H''(x,s,0) = h\langle\langle x, s\rangle, *\rangle, \qquad H''(x,1,t) = g_t(x).$$

A verificação de que H'' foi bem definida é direta e a continuidade segue do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3]. Utilizando H'' e $r\colon I \times I \to (\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0\})$ dada na prova da Proposição 4.2, definimos $H'\colon X \times I \times I \to Z$ por $H'(x,s,t) = H''(x, r(s,t))$.

Como $H'(\{*\} \times I \times I) = *$ e $H'(x,0,t) = h\langle *, f(x)\rangle = h\langle\langle x, 0\rangle, *\rangle$, podemos definir $H\colon M_f \times I \to Z$ por

$$H(\langle\langle x, s\rangle, *\rangle, t) = H'(x,s,t), \qquad H(\langle *, y\rangle, t) = h\langle y\rangle$$

e verifica-se facilmente que H determina a homotopia h_t desejada.

Finalmente, para provar o item 3, defina $j\colon Y \to M_f$ por $j(y) = \langle *, y\rangle$, para todo $y \in Y$. Então $f'' \circ j(y) = f''\langle *, y\rangle = y$, isto é, $f'' \circ j = \mathrm{id}_Y$. Por outro lado, $j \circ f''\langle *, y\rangle = \langle *, y\rangle$ e $j \circ f''\langle\langle x, t\rangle, *\rangle = \langle *, f(x)\rangle$. Definimos a homotopia desejada $G\colon j \circ f'' \simeq \mathrm{id}_Y$ por

$$G(\langle *, y\rangle, s) = \langle *, y\rangle, \qquad G(\langle\langle x, t\rangle, *\rangle, s) = \langle\langle x, ts\rangle, *\rangle. \qquad \square$$

4.2 Fibrações

Definição 4.12. Uma aplicação $p\colon E \to B$ é uma *fibração* quando dados um espaço W, uma aplicação $h\colon W \to E$ e uma homotopia $g_t\colon W \to B$ tais que $p \circ h = g_0$, existe uma homotopia $h_t\colon W \to E$ com $h_0 = h$ e $p \circ h_t = g_t$, para todo $t \in I$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[ur, dashed, shift left, "h_t"] \arrow[ur, shift right, "h"'] \arrow[r, "g_t"'] & B \end{tikzcd}$$

O espaço $F = p^{-1}(\{*\})$ é chamado *fibra* de p e a sequência

$$F \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ p\ } B$$

onde i é a inclusão, é também chamada fibração.

A interpretação das cofibrações como inclusões $i\colon A \to X$, onde vale a propriedade de extensão de homotopia no par (X, A) pode ser dualizada. Dadas $p\colon E \to B$ e $g\colon W \to B$ aplicações, um levantamento de g é uma aplicação $h\colon W \to E$ tal que $p \circ h = g$. Nesse contexto, a homotopia h_t na definição acima também é chamada de levantamento da homotopia g_t. Desse modo, podemos dizer que $p\colon E \to B$ é uma fibração se, para toda homotopia $g_t\colon W \to B$ para qual existe um levantamento $h\colon W \to E$ de g_0, também existir um levantamento de homotopia $h_t\colon W \to E$ de g_t.

Exemplo 4.13. Os recobrimentos $S^n \to \mathbb{R}P^n$, $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ e $S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$, que fornecem os espaços projetivos, são exemplos de fibrações, cujas fibras são S^0, S^1 e S^3, respectivamente. Se $n = 1$, usando as identificações (ver [1, Lema 3.4.4]) $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$, $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ e $\mathbb{H}P^1 \approx S^4$, obtemos as fibrações com fibra, espaço total e espaço base sendo esferas, a saber, as chamadas fibrações de Hopf

$$S^0 \to S^1 \to S^1, \quad S^1 \to S^3 \to S^2, \quad S^3 \to S^7 \to S^4.$$

Mais exemplos de fibrações (em particular, fibrados) podem ser encontrados em [1, Seção 3.4].

Proposição 4.14. *Para todo espaço B, a aplicação avaliação $p\colon PB \to B$, dada por $p(\gamma) = \gamma(1)$, é uma fibração.*

Demonstração. Sejam $h\colon W \to PB$ uma aplicação e $g_t\colon W \to B$ uma homotopia com $g_0 = p \circ h$. Queremos definir uma homotopia $h_t\colon W \to PB$ tal que $p \circ h_t = g_t$.

Para isso, defina $h'\colon W \times I \to B$ por $h'(w, t) = h(w)(t)$ e $H'\colon W \times ((\{0, 1\} \times I) \cup (I \times \{0\})) \to B$ por

$$H'(w, s, 0) = h'(w, s), \qquad H'(w, 0, t) = *, \qquad H'(w, 1, t) = g_t(w).$$

A verificação de que H' foi bem definida é direta e a continuidade segue do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3]. Agora, podemos definir $H\colon W \times I \times I \to B$ por

$$H(w, s, t) = H'(w, r(s, t)),$$

onde $r\colon I \times I \to (\{0, 1\} \times I) \cup (I \times \{0\})$ é a mesma aplicação da demonstração da Proposição 4.2. Por fim, obtemos a homotopia h_t desejada definindo $h_t(w)(s) = H(w, s, t)$. $\square$

Proposição 4.15. *Se $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração e B é contrátil, então i é equivalência de homotopia.*

Demonstração. Como B é contrátil, existe uma homotopia $g_t\colon B \to B$ com $g_0 = \mathrm{id}_B$ e $g_1 = *$. Assim, temos que $p \simeq_{g_t \circ p} *$ e, como p é uma fibração, temos que existe uma homotopia $h_t\colon E \to E$ com $h_0 = \mathrm{id}_E$ e $p \circ h_t = g_t \circ p$. Em particular, $p \circ h_1 = g_1 \circ p = *$, isto é, $h_1(E) \subset F$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, shift left, "h_t"] \arrow[ur, shift right, "\mathrm{id}_E"'] \arrow[r, "g_t \circ p"'] & B \end{tikzcd}$$

Logo, podemos restringir o contradomínio de h_1 e obter $h_1'\colon E \to F$ tal que

$$i \circ h_1' = h_1 \simeq h_0 = \mathrm{id}_E.$$

Por outro lado, como $p \circ h_t = g_t \circ p$, temos que $p(h_t(F)) = g_t(p(F)) = \{*\}$, isto é, $h_t(F) \subset F$ e podemos definir uma homotopia $\tilde{h}_t \colon F \to F$ por $\tilde{h}_t(x) = h_t(x) = h_t(i(x))$. Note que $\tilde{h}_0 = h_0(x) = x$, isto é, $\tilde{h}_0 = \mathrm{id}_F$. Além disso, $\tilde{h}_1(x) = h_1(x) = h'_1(i(x))$, isto é, $\tilde{h}_1 = h'_1 \circ i$. Logo, $\mathrm{id}_F \simeq_{\tilde{h}_t} h'_1 \circ i$, e concluímos que i é equivalência de homotopia, com inversa homotópica h'_1. $\square$

Definição 4.16. Seja $f \colon X \to Y$ uma aplicação. O *mapping path*, denotado por P_f, é o subespaço de $X \times Y^I$ dado por

$$P_f = \{(x, \alpha) \in X \times Y^I \mid \alpha(1) = f(x)\}.$$

Proposição 4.17. *Sejam $f \colon X \to Y$ uma aplicação. Tome $f' \colon X \to P_f$ e $f'' \colon P_f \to Y$ as aplicações dadas por $f'(x) = (x, \gamma_x)$, onde γ_x é dada por $\gamma_x(t) = f(x)$ para todo $t \in I$, e $f''(x, \gamma) = \gamma(0)$. Então:*

1. *$f = f'' \circ f'$,*
2. *f'' é fibração,*
3. *f' é equivalência de homotopia.*

Demonstração. Para provar o item 1, basta verificar que $f'' \circ f'(x) = f''(x, \gamma_x) = \gamma_x(0) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Para provar o item 2, tome $h \colon W \to P_f$ uma aplicação e $g_t \colon W \to Y$ uma homotopia tal que $f'' \circ h = g_0$. Queremos provar que existe uma homotopia $h_t \colon W \to P_f$ tal que $f'' \circ h_t = g_t$ para todo $t \in I$.

$$\begin{tikzcd} & P_f \arrow[d, "f''"] \\ W \arrow[ur, dashed, "h_t"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[r, "g_t"'] & Y \end{tikzcd}$$

Para isso, defina $h' \colon W \times I \to Y$ por $h'(w, t) = h(w)(t)$ e $H' \colon W \times ((\{0, 1\} \times I) \cup (I \times \{0\})) \to Y$ por

$$H'(w, s, 0) = h'(w, s), \qquad H'(w, 0, t) = f''(h(w)), \qquad H'(w, 1, t) = g_t(w).$$

A verificação de que H' foi bem definida é direta e a continuidade segue do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3]. Agora, podemos definir $H \colon W \times I \times I \to B$ por

$$H(w, s, t) = H'(w, r(s, t)),$$

onde $r \colon I \times I \to (\{0, 1\} \times I) \cup (I \times \{0\})$ é a mesma aplicação da demonstração da Proposição 4.2. Por fim, obtemos a homotopia h_t desejada definindo $h_t(w)(s) = H(w, s, t)$.

Por fim, para provar o item 3, defina $p \colon P_f \to X$ por $p(x, \gamma) = x$ para todo $(x, \gamma) \in P_f$. Então $p \circ f'(x) = p(x, \gamma_x) = x$, isto é, $p \circ f' = \mathrm{id}_X$. Por outro lado, $f' \circ p(x, \gamma) = (x, \gamma_x)$. Para cada $\gamma \in Y^I$ e $s \in I$, denote por $\tilde{\gamma}_s$ o caminho dado por $\tilde{\gamma}_s(t) = \gamma(1 - (1 - t)s)$. Claramente, a associação $(\gamma, s) \to \tilde{\gamma}_s$ é contínua. Assim, podemos definir a homotopia $G \colon P_f \times I \to P_f$ por

$$G(x, \gamma, s) = (x, \tilde{\gamma}_s).$$

Para mostrar que G é homotopia de $f' \circ p$ em id_{P_f}, basta notar que, para todo $t \in I$, $\tilde{\gamma}_0(t) = \gamma(1) = f(x)$, isto é, $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_x$, e $\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma(1-1+t) = \gamma(t)$, isto é, $\tilde{\gamma}_1 = \gamma(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} G(x,\gamma,0) &= (x,\gamma_x) = f' \circ p(x,\gamma) \\ G(x,\gamma,1) &= (x,\gamma) = \mathrm{id}_{P_f}(x,\gamma) \end{aligned}$$

para todo $(x,\gamma) \in P_f$. $\square$

5 Pushouts e Pullbacks

Diagramas comutativos, além de conterem informações úteis, nos dão uma forma intuitiva e prática de interpretar essas informações. Por isso, obter diagramas com essa propriedade é sempre desejável. Isso justifica imediatamente a relevância dos pushouts e pullbacks, que são diagramas comutativos que obtemos a partir de duas aplicações quaisquer, desde que elas tenham mesmo domínio ou contradomínio. A partir deles, definiremos os mapping cones e os homotopy fibers, espaços que estão intimamente ligados a fibrações e cofibrações, e darão sequência aos assuntos discutidos no capítulo anterior.

Definiremos também os homotopy pushouts, que nos fornecem diagramas que comutam a menos de homotopia. Apresentaremos formas de relacionar dois homotopy pushouts e definiremos o join $X * Y$. Por fim, discutimos brevemente os homotopy pullbacks, que dualizam os homotopy pushouts.

5.1 Pushout e Mapping Cone

Definição 5.1. Dadas duas aplicações $f\colon A \to X$ e $g\colon A \to Y$, um *pushout* de f e g é um espaço P tal que:

(i) existem aplicações $u\colon X \to P$ e $v\colon Y \to P$ satisfazendo $u \circ f = v \circ g$,

(ii) para todo espaço Z e aplicações $r\colon X \to Z$, $s\colon Y \to Z$ com $r \circ f = s \circ g$, existe uma única aplicação $t\colon P \to Z$ tal que $t \circ u = r$ e $t \circ v = s$, de modo que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "r"] & \\
Y \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "s"'] & P \arrow[dr, "t"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

A tripla (P, u, v) e o quadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[r, "v"] & P
\end{tikzcd}$$

também são chamados *pushout*.

É fácil mostrar a partir do item (ii) que o pushout é único, a menos de homeomorfismo. Provaremos a seguir que ele sempre existe.

Proposição 5.2. *Dadas duas aplicações $f\colon A \to X$ e $g\colon A \to Y$, existe um pushout para f e g.*

Demonstração. Defina $P = X \vee Y/\sim$, onde $\sim$ é dada por $(*, g(a)) \sim (f(a), *)$, para todo $a \in A$. Além disso, defina $u = q \circ i_1$ e $v = q \circ i_2$, onde $q\colon X \vee Y \to P$ é a aplicação quociente e $i_1\colon X \to X \vee Y$ e $i_2\colon Y \to X \vee Y$ são as inclusões, isto é, i_1 e i_2 são dadas por $i_1(x) = (x, *)$ e $i_2(y) = (*, y)$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Então P é um pushout de f e g.

De fato, é fácil ver que $u \circ f = v \circ g$. Além disso, dados um espaço Z e aplicações $r\colon X \to Z$, $s\colon Y \to Z$ tais que $r \circ f = s \circ g$, temos que $\nabla \circ (r \vee s)(f(a), *) = r(f(a)) = s(g(a)) = \nabla \circ (r \vee s)(*, g(a))$. Assim, $\nabla \circ (r \vee s)$ induz uma aplicação $t\colon P \to Z$ tal que $t \circ u = r$ e $t \circ v = s$.

Por fim, dada $m\colon P \to Z$ tal que $m \circ u = r$ e $m \circ v = s$, temos que $m \circ q \circ i_1 = m \circ u = r = t \circ u = t \circ q \circ i_1$ e, do mesmo modo, $m \circ q \circ i_2 = t \circ q \circ i_2$. Assim, $m \circ q = t \circ q$ e concluímos $m = t$ pois q é sobrejetora. □

Proposição 5.3. *Seja*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"] & P \end{tikzcd}$$

um quadrado pushout. Se g é cofibração, então u também é. Além disso, v induz homeomorfismo v' da cofibra de g na cofibra de u, de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p"'] & P \arrow[d, "q"] \\ \dfrac{Y}{g(A)} \arrow[r, dashed, "v'"] & \dfrac{P}{u(X)} \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde p e q são as projeções.

Demonstração. Sejam $h\colon P \to Z$ uma aplicação e $k_t\colon X \to Z$ uma homotopia tal que $h \circ u = k_0$, de modo que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "k_t"] & \\ Y \arrow[r, "v"] & P \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Então, $h \circ v \circ g = h \circ u \circ f = k_0 \circ f$ e, como g é cofibração, existe uma homotopia $h'_t\colon Y \to Z$ tal que $h'_t \circ g = f \circ k_t$, para todo $t \in I$.

Defina $\tilde{H}\colon (X \vee Y) \times I \to Z$ por $\tilde{H}((*, y), t) = h'_t(y)$ e $\tilde{H}((x, *), t) = k_t(x)$. Se $\langle x, * \rangle = \langle *, y \rangle$ em P, então $x = f(a)$ e $y = g(a)$ para algum $a \in A$ e temos $k_t(x) = k_t(f(a)) = h'_t(g(a)) = h'_t(y)$. Assim, $\tilde{H}$ induz uma homotopia $H\colon P \times I \to Z$ e, considerando as

aplicações $h_t\colon P \to Z$ determinadas por H, temos que $h_t \circ u = k_t$, para todo $t \in I$ e $h_0 = h$. Isso prova que u é cofibração.

Como $q(v(g(A))) = q(u(f(A))) \subset q(u(X)) = \{*\}$, $q \circ v$ induz $v'\colon Y/g(A) \to P/u(X)$, dada por $v'\langle y\rangle = \langle *, y\rangle$. Note que, $v' \circ p(y) = \langle *, y\rangle = \langle v(y)\rangle = q \circ v(y)$, para todo $y \in Y$, isto é, $v' \circ p = q \circ v$.

Por outro lado, tome $w\colon X \vee Y \to Y$ a aplicação dada por $w(x, *) = *$ e $w(*, y) = y$. Note que $P/u(X)$ é o quociente $(X \vee Y)/\sim$ onde $\sim$ é dada por $(x, *) \sim *$ e $(*, g(a)) \sim (f(a), *) \sim *$, isto é, $P/u(X) = (X \vee Y)/(X \vee g(A))$. Como $p \circ w(x, *) = *$ e $p \circ w(*, g(a)) = p(g(a)) = *$, temos que $p \circ w$ induz uma aplicação $w'\colon P/u(X) \to Y/g(A)$ dada por $w'\langle *, y\rangle = \langle y\rangle$ (e $w'\langle x, *\rangle = *$). Verifica-se facilmente que w' é inversa de v' e, portanto, v' é homeomorfismo. $\square$

Definição 5.4. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. O pushout de f e da inclusão $i\colon X \hookrightarrow CX$, ilustrado no diagrama abaixo, é chamado *homotopy cofiber*, ou *mapping cone*, de f, e é denotado por C_f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ CX \arrow[r, "v"] & C_f \end{tikzcd}$$

Pela Proposição 4.2, sabemos que

$$X \xhookrightarrow{i} CX \longrightarrow \Sigma X$$

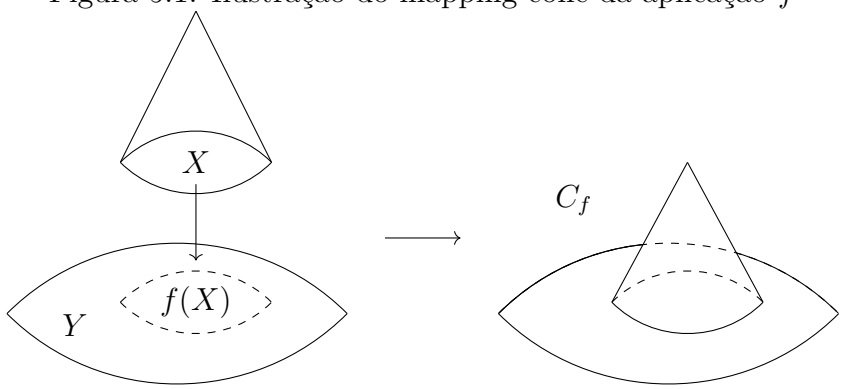
é uma cofibração. Logo, pela Proposição 5.3 que

$$Y \xrightarrow{u} C_f \longrightarrow Y/C_f \approx \Sigma X$$

também é uma cofibração e, tendo em mente a Proposição 4.8, podemos chamar a aplicação u de inclusão de Y em C_f.

Pela Proposição 5.2, podemos tomar o mapping cone de uma aplicação $f\colon X \to Y$ como o espaço quociente $CX \vee Y/\sim$, onde $\sim$ é dada por $(*, f(a)) \sim (i(a), *) = (\langle a, 0\rangle, *)$. Isso justifica o nome "mapping cone".

Figura 5.1: Ilustração do mapping cone da aplicação f



Fonte:Elaborado pelo autor

Obtemos também que a inclusão $u\colon Y \to C_f$ é dada por $u(y) = \langle *, y\rangle$.

Podemos obter o mapping cone C_f a partir do mapping cylinder M_f quocientando os pontos $\langle a, 1\rangle$ de M_f. Como esses pontos são justamente a imagem da cofibração $f'\colon X \to M_f$ da Proposição 4.11, temos $C_f = M_f/f'(X)$, e obtemos a cofibração

$$X \xrightarrow{f'} M_f \longrightarrow C_f,$$

que justifica o nome "homotopy cofiber", pois podemos interpretar, a partir da Proposição 4.11, que C_f é a cofibra de uma aplicação que difere de f apenas por uma equivalência de homotopia. Outra justificativa é dada pela proposição a seguir:

Proposição 5.5. *Seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Y/f(X)$ uma cofibração. Então existe uma equivalência de homotopia $\alpha\colon C_f \to Y/f(X)$. Além disso, se u é a inclusão, temos que $\alpha \circ u = p$, de modo que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook, "u"'] & Y/f(X) \\
& C_f \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Pela Proposição 5.3, temos que $v\colon CX \to C_f$ é cofibração e a inclusão $u\colon Y \hookrightarrow C_f$ induz um homeomorfismo $u'\colon Y/f(X) \to C_f/v(CX)$, de modo que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & CX \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "p"'] & C_f \arrow[d, "q"] \\
\dfrac{Y}{f(X)} \arrow[r, dashed, "u'"] & \dfrac{C_f}{v(CX)}
\end{tikzcd}$$

Como CX é contrátil, temos pela Proposição 4.9 que q é equivalência de homotopia. Então, para obter o resultado, basta definir $\alpha = u'^{-1} \circ q$. $\square$

Como a inclusão $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ é cofibração, como vimos no Corolário 4.6, temos o corolário a seguir:

Corolário 5.6. *Para quaisquer espaços X e Y, o mapping cone C_j da inclusão $j\colon X \vee Y \to X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia do produto smash $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$.*

Proposição 5.7. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Então, uma aplicação $g\colon Y \to Z$ pode ser estendida para C_f se, e somente se, $g \circ f \simeq *$.*

Demonstração. Considere o pushout

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \arrow[d, "u"] \\
CX \arrow[r, "v"] & C_f
\end{tikzcd}$$

Suponha primeiro que g pode ser estendida para C_f, isto é, existe $h\colon C_f \to Z$ tal que $h \circ u = g$. Então $g \circ f = h \circ u \circ f = h \circ v \circ i$. Mas, como $CX \simeq *$, temos que $i \simeq *$ e, consequentemente, $g \circ f = h \circ v \circ i \simeq *$.

Agora, suponha que $g \circ f \simeq_F *$ para alguma homotopia $F\colon X \times I \to Z$. Como $F((X \times \{1\}) \cup (\{*\} \times I)) = \{*\}$ e

$$CX = \frac{X \times I}{(X \times \{1\}) \cup (\{*\} \times I)}$$

temos que F induz uma aplicação $\tilde{F}\colon CX \to Z$, com $\tilde{F} \circ i(x) = \tilde{F}\langle x, 0\rangle = F(x, 0) = g \circ f(x)$ para todo $x \in X$, isto é $\tilde{F} \circ i = g \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
CX \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "\tilde{F}"'] & C_f & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Com isso, temos pela definição de pushout que existe uma aplicação $t\colon C_f \to Z$ tal que $t \circ u = g$, isto é, t estende g. □

Corolário 5.8. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $u\colon Y \to C_f$ a inclusão. Então a sequência*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f$$

é coexata.

Demonstração. Tome Z um espaço qualquer e considere as aplicações $u^*\colon [C_f, Z] \to [Y, Z]$ e $f^*\colon [Y, Z] \to [X, Z]$. Precisamos apenas provar que $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$. Para isso, note que dado $[g] \in \mathrm{Im}(u^*)$, temos que $[g] = [h \circ u]$ para alguma $h\colon C_f \to Z$. Como claramente h estende $h \circ u$, temos $(h \circ u) \circ f \simeq *$ e, consequentemente, $f^*[g] = [g \circ f] = [(h \circ u) \circ f] = [*]$. Portanto, $[g] \in \mathrm{Ker}(f^*)$ e $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(f^*)$.

Por outro lado, dado $[g] \in \mathrm{Ker}(f^*)$, temos $g \circ f \simeq *$ e, consequentemente, existe $h\colon C_f \to Z$ tal que $h \circ u = g$, isto é, $[g] = u^*[h] \in \mathrm{Im}(u^*)$. Portanto $\mathrm{Ker}(f^*) \subset \mathrm{Im}(u^*)$ e obtemos a igualdade desejada. □

Corolário 5.9. *Qualquer cofibração*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Y/f(X)$$

é uma sequência coexata.

Demonstração. Basta notar que, se α é a equivalência de homotopia da Proposição 5.5, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_f \arrow[d, "\alpha"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "p"] & Y/f(X)
\end{tikzcd}$$

nos dá uma equivalência de sequências. O resultado segue da Proposição 2.16. □

Proposição 5.10. *Seja $f\colon X \to Y$ uma cofibração. Considere os pushouts*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ CX \arrow[r, "v"] & C_f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & C_f \arrow[d, "u'"] \\ CY \arrow[r, "v'"] & C_u \end{tikzcd}$$

e as cofibrações

$$Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} C_f/u(Y) \approx \Sigma X \quad e \quad C_f \xrightarrow{u'} C_u \xrightarrow{p'} C_u/u'(C_f) \approx \Sigma Y.$$

Então, $\alpha \circ u' = p$ e $(-\Sigma f) \circ \alpha \simeq p'$,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "u"] & C_f \arrow[r, "u'"] \arrow[dr, "p"] & C_u \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "p'"] & \\ & & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma f"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

onde α é a equivalência de homotopia da Proposição 5.5 e $-\Sigma f$ é dada por $(-\Sigma f)\langle x, t\rangle = \langle f(x), 1-t\rangle$.

Demonstração. Obtemos $\alpha \circ u' = p$ diretamente da Proposição 5.5. Para provar $(-\Sigma f) \circ \alpha \simeq p'$, note primeiro que α é dada por $\alpha\langle\langle y, s\rangle, *\rangle = *$ e $\alpha\langle *, z\rangle = \langle z\rangle$, para todo $\langle y, s\rangle \in CY$ e $z \in C_f$. Em particular, se $z = \langle\langle x, s\rangle, *\rangle$ temos $\alpha\langle *, z\rangle = \langle x, s\rangle$ e se $z = \langle *, y\rangle$, temos $\alpha\langle *, z\rangle = *$.

Defina $H\colon C_u \times I \to \Sigma Y$ por

$$\begin{aligned} H(\langle\langle y, s\rangle, *\rangle, t) &= \langle y, s(1-t)+t\rangle \\ H(\langle *, z\rangle, t) &= \langle f(x), t(1-s)\rangle, \text{ se } z = \langle\langle x, s\rangle, *\rangle. \end{aligned}$$

Note que para $(\langle *, z\rangle, t)$, com $z = \langle *, y\rangle$, temos $\langle *, z\rangle = \langle *, u(y)\rangle = \langle j(y), *\rangle = \langle\langle y, 0\rangle, *\rangle$ e, portanto, H está definida para esse caso também. A continuidade de H segue do Lema da Colagem [16, Teorema 18.3] e concluímos que $p' \simeq_H (-\Sigma f) \circ \alpha$ avaliando H em $t = 0$ e $t = 1$. □

Corolário 5.11. *Dada uma aplicação $f\colon X \to Y$, considere a inclusão $u\colon Y \to C_f$ e a projeção $p\colon C_f \to C_f/u(Y) \approx \Sigma X$. Então as sequências*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

são coexatas.

Demonstração. As sequências

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \qquad \text{e} \qquad Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X$$

são coexatas pelos Corolários 5.8 e 5.9. Além disso, pela equivalência de sequências (ver Proposição 2.16)

$$\begin{tikzcd} C_f \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_u \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ C_f \arrow[r, "p"] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma f"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

concluímos que, para todo espaço Z, a sequência

$$[\Sigma Y, Z] \xrightarrow{(-\Sigma f)^*} [\Sigma X, Z] \xrightarrow{p^*} [C_f, Z] \xrightarrow{u^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$$

é exata e portanto a sequência

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$$

é coexata. Além disso, verifica-se facilmente que $(-\Sigma f)^* = -(\Sigma f)^*$ e, consequentemente, temos $\mathrm{Im}((\Sigma f)^*) = \mathrm{Im}((-\Sigma f)^*)$. Logo,

$$[\Sigma Y, Z] \xrightarrow{(\Sigma f)^*} [\Sigma X, Z] \xrightarrow{p^*} [C_f, Z] \xrightarrow{u^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$$

é exata, e concluímos que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

é coexata. □

Aplicando indutivamente o Corolário 3.26 sobre a segunda sequência do corolário anterior, obtemos a sequência coexata da definição a seguir:

Definição 5.12. A sequência coexata

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^n X \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n Y \xrightarrow{\Sigma^n u} \Sigma^n C_f \xrightarrow{\Sigma^n p} \Sigma^{n+1} X \xrightarrow{\Sigma^{n+1} f} \Sigma^{n+1} Y \longrightarrow \cdots$$

é chamada *sequência coexata da aplicação* f. Dado um espaço Z, a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^{n+1} Y, Z] \xrightarrow{(\Sigma^{n+1} f)^*} [\Sigma^{n+1} X, Z] \xrightarrow{(\Sigma^n p)^*} [\Sigma^n C_f, Z] \xrightarrow{(\Sigma^n u)^*} [\Sigma^n Y, Z] \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma Y, Z] \xrightarrow{(\Sigma f)^*} [\Sigma X, Z] \xrightarrow{p^*} [C_f, Z] \xrightarrow{u^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$$

é chamada *sequência de Puppe*, ou *sequência de Barratt–Puppe*.

Se $A \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{q} Q$ é uma cofibração e $\alpha\colon C_i \to Q$ é a equivalência de homotopia da Proposição 5.5, com inversa homotópica α', temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_i \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma A \arrow[r, "\Sigma i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \Sigma X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \cdots \\ A \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "q"] & Q \arrow[r, "p\circ\alpha'"] & \Sigma A \arrow[r, "\Sigma i"] & \Sigma X \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

nos dá uma equivalência de sequências e, pela Proposição 2.16, obtemos a definição a seguir:

Definição 5.13. Se $A \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{q} Q$ é uma cofibração e Z é um espaço qualquer, a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^{n+1}X, Z] \xrightarrow{(\Sigma^{n+1}i)^*} [\Sigma^{n+1}A, Z] \xrightarrow{(\Sigma^n\partial)^*} [\Sigma^n Q, Z] \xrightarrow{(\Sigma^n q)^*} [\Sigma^n X, Z] \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma X, Z] \xrightarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma A, Z] \xrightarrow{\partial^*} [Q, Z] \xrightarrow{q^*} [X, Z] \xrightarrow{i^*} [A, Z]$$

é chamada *sequência exata da cofibração* i, e a aplicação $\partial = p \circ \alpha'$, onde $\alpha' \colon Q \to C_i$ é equivalência de homotopia, é chamada *aplicação conectante da cofibração* i.

5.2 Homotopy Pushout

Nessa seção, discutiremos um conceito similar ao do pushout, mas com a igualdade $u \circ f = v \circ g$ substituída por uma homotopia.

Definição 5.14. Dadas duas aplicações $f \colon A \to X$ e $g \colon A \to Y$, o *homotopy pushout padrão*, ou *mapping cylinder duplo*, de f e g é o espaço $O = (X \vee (A \ltimes I) \vee Y)/\sim$, onde a relação $\sim$ é dada por $(*, \langle a, 0\rangle, *) \sim (f(a), *, *)$ e $(*, \langle a, 1\rangle, *) \sim (*, *, g(a))$. Se $u \colon X \to O$ e $v \colon Y \to O$ são dadas por $u(x) = \langle x, *, *\rangle$ e $v(y) = \langle *, *, y\rangle$, a tripla (O, u, v) e o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"] & O \end{tikzcd}$$

também são chamados de homotopy pushout padrão.

Note que $F \colon A \times I \to O$, dada por $F(a, t) = \langle *, \langle a, t\rangle, *\rangle$, é homotopia entre $u \circ f$ e $v \circ g$. Assim, o diagrama dado na definição acima comuta, a menos de homotopia, justificando o nome "homotopy pushout".

A proposição a seguir nos mostra como uma definição alternativa do mapping cone pode ser obtida a partir do homotopy pushout padrão.

Proposição 5.15. *O homotopy pushout padrão O de uma aplicação $f \colon A \to X$ e da constante $* \colon A \to \{*\}$ é homeomorfo ao mapping cone C_f.*

Demonstração. O homeomorfismo $h \colon O \to C_f$ desejado é dado por $h\langle x, *, *\rangle = \langle x, *\rangle$ e $h\langle *, \langle a, t\rangle, *\rangle = \langle *, \langle a, t\rangle\rangle$. Note que h está bem definida pois $h\langle f(a), *, *\rangle = \langle f(a), *\rangle = \langle *, \langle a, 0\rangle\rangle = h\langle *, \langle a, 0\rangle, *\rangle$. $\square$

Definição 5.16. Sejam $f \colon A \to X$ e $g \colon A \to Y$ aplicações com homotopy pushout padrão (O, u, v). Dizemos que um espaço P é um *homotopy pushout* de f e g se existem aplicações $r \colon X \to P$ e $s \colon Y \to P$ tais que:

- $u \circ f \simeq v \circ g$,
- existe equivalência de homotopia $\theta \colon O \to P$ tal que $\theta \circ u \simeq r$ e $\theta \circ v \simeq s$, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "s"'] & O \arrow[d, "\theta"] & X \arrow[l, "u"'] \arrow[dl, "r"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

A tripla (P, r, s) e o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "r"] \\ Y \arrow[r, "s"] & P \end{tikzcd}$$

também são chamados homotopy pushout de f e g.

Note que existe equivalência de homotopia $\theta\colon O \to P$ tal que $\theta \circ u \simeq r$ e $\theta \circ v \simeq s$ se, e somente se, existe equivalência de homotopia $\theta'\colon P \to O$ tal que $\theta' \circ r \simeq u$ e $\theta' \circ s \simeq v$, pois se existe θ nas condições desejadas, definimos θ' a inversa homotópica de θ e temos $\theta' \circ r \simeq \theta' \circ \theta \circ u \simeq u$ e $\theta' \circ s \simeq \theta' \circ \theta \circ v \simeq v$. Se existe θ', definimos θ de modo análogo.

Note também que $r \circ f \simeq \theta \circ u \circ f \simeq \theta \circ v \circ g \simeq s \circ g$. Assim, no diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\ Y \arrow[r, "s"] \arrow[drr, bend right, "v"'] & P \arrow[dr, shift left, "\theta'"] & \\ & & O \arrow[ul, shift left, "\theta"] \end{tikzcd}$$

o quadrado comuta, a menos de homotopia.

Claramente, um homotopy pushout padrão é, também, um homotopy pushout.

Proposição 5.17. *Sejam $f\colon A \to X$ e $g\colon A \to Y$ aplicações. Se (P, r, s) é um homotopy pushout de f e g, Z é um espaço e $a\colon X \to Z$ e $b\colon Y \to Z$ são aplicações tais que $a \circ f \simeq b \circ g$ então existe uma aplicação $c\colon P \to Z$ tal que $c \circ r \simeq a$ e $c \circ s \simeq b$, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\ Y \arrow[r, "s"] \arrow[drr, bend right, "b"'] & P \arrow[dr, dashed, "c"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja (O, u, v) o homotopy pushout padrão de f e g. Defina $c'\colon O \to Z$ por $c'\langle x, *, *\rangle = a(x)$, $c'\langle *, *, y\rangle = b(y)$ e $c'\langle *, \langle a, t\rangle, *\rangle = H(a, t)$, onde $H\colon A \times I \to Z$ é uma homotopia entre $a \circ f$ e $b \circ g$. Assim, c' é contínua pelo Lema da Colagem [16, Teorema 18.3] e temos $c'(u(x)) = c'(x, *, *) = a(x)$ e $c'(v(y)) = c'(*, *, y) = b(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, isto é, $c' \circ u = a$ e $c' \circ v = b$.

Para provar o resultado para P, tome $\theta'\colon P \to O$ uma equivalência de homotopia tal que $\theta' \circ r \simeq u$ e $\theta' \circ s \simeq v$. Então, podemos definir $c = c' \circ \theta'$ tal que, como pode ser

observado no diagrama abaixo, $c \circ r = c' \circ \theta' \circ r \simeq c' \circ u = a$ e $c \circ s = c' \circ \theta' \circ s \simeq c' \circ v = b$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & X \arrow[dl, "r"] \arrow[dd, "u"] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\
& P \arrow[dr, "\theta'"] & & \\
Y \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "v"] \arrow[drr, bend right, "b"'] & & O \arrow[dr, "c'"] & \\
& & & Z
\end{tikzcd}$$

□

Proposição 5.18. *Se $f\colon A \to X$ ou $g\colon A \to Y$ é cofibração, então o pushout (P, r, s) de f e g é um homotopy pushout.*

Demonstração. Suponha que f é cofibração (o caso onde g é cofibração seguirá da simetria da proposição). Seja (O, u, v) o homotopy pushout padrão de f e g. Como P é pushout, podemos definir $\theta\colon O \to P$ por $\theta(\langle x, *, *\rangle) = \langle x, *\rangle$, $\theta(\langle *, *, y\rangle) = \langle *, y\rangle$ e $\theta(\langle *, \langle a, t\rangle, *\rangle) = r(f(a)) = s(g(a))$. Então $\theta \circ u(x) = \theta(\langle x, *, *\rangle) = \langle x, *\rangle = r(x)$ e $\theta \circ v(y) = \theta(\langle *, *, y\rangle) = \langle *, y\rangle = s(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Assim, $\theta \circ u = r$ e $\theta \circ v = s$ e resta apenas provar que θ é equivalência de homotopia.

Existe um homeomorfismo natural, dado por $\langle x, \langle a, t\rangle, y\rangle \mapsto \langle\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, y\rangle$, de O no espaço $(M_f \vee Y)/{\sim}$, onde M_f é o mapping cylinder de f e $\sim$ é dada por $\langle\langle *, \langle a, 1\rangle\rangle, *\rangle \sim \langle *, g(a)\rangle$. Tendo isso em mente, não faremos distinção entre os elementos $\langle x, \langle a, t\rangle, y\rangle$ de O e os elementos $\langle\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, y\rangle$ de $(M_f \vee Y)/{\sim}$.

Defina $\eta\colon X \to M_f$ por $\eta(x) = \langle x, *\rangle$ e $\xi_t\colon A \to M_f$ por $\xi_t(a) = \langle *, (a, t)\rangle$, para cada $t \in I$, $x \in X$ e $a \in A$. Então ξ_t é homotopia e, como f é cofibração, existe homotopia $\sigma_t\colon X \to M_f$ tal que $\sigma_0(x) = \eta(x) = \langle x, *\rangle$ e $\sigma_t(f(a)) = \xi_t(a) = \langle *, (a, t)\rangle$, para todo $x \in X$, $a \in A$ e $t \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\xi_t"] & \\
X \arrow[r, shift left, "\eta"] \arrow[r, shift right, dashed, "\sigma_t"'] & M_f
\end{tikzcd}$$

Defina $\mu\colon P \to O$ por $\mu(\langle x, *\rangle) = \langle \sigma_1(x)\rangle$ e $\mu(\langle *, y\rangle) = \langle y\rangle$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Provaremos que μ é inversa homotópica de θ exibindo homotopias entre $\theta \circ \mu$ e id_P e entre $\mu \circ \theta$ e id_O.

Defina $F\colon P \times I \to P$ por $F(\langle x, *\rangle, t) = \theta\langle \sigma_t(x), *\rangle$ e $F(\langle *, y\rangle, t) = \langle *, y\rangle$, para todo $t \in I$, $x \in X$ e $y \in Y$. Então, para $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&F(\langle x, *\rangle, 0) = \theta\langle \sigma_0(x), *\rangle = \theta\langle\langle x, *\rangle, *\rangle = \langle x, *\rangle,\\
&F(\langle *, y\rangle, 0) = \langle *, y\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $t = 1$ temos

$$\begin{aligned}
&F(\langle x, *\rangle, 1) = \theta\langle \sigma_1(x), *\rangle = \theta \circ \mu(\langle x, *\rangle),\\
&F(\langle *, y\rangle, 1) = \langle *, y\rangle = \theta \circ \mu(\langle *, y\rangle).
\end{aligned}$$

Logo, F é homotopia entre $\theta \circ \mu$ e id_P.

Agora, defina $G\colon O \times I \to O$ por $G(\langle x, *, *\rangle, t) = \langle \sigma_t(x), *\rangle$, $G(\langle *, *, y\rangle, t) = \langle *, *, y\rangle$ e $G(\langle *, \langle a, s\rangle, *\rangle, t) = \langle *, \langle a, (1-s)t + s\rangle, *\rangle$. Então, para $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} G(\langle x, *, *\rangle, 0) &= \langle \sigma_0(x), *\rangle = \langle x, *, *\rangle, \\ G(\langle *, *, y\rangle, 0) &= \langle *, *, y\rangle, \\ G(\langle *, \langle a, s\rangle, *\rangle, 0) &= \langle *, \langle a, (1-s)0 + s\rangle, *\rangle = \langle *, \langle a, s\rangle, *\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t = 1$, temos

$$\begin{aligned} G(\langle x, *, *\rangle, 1) &= \langle \sigma_1(x), *\rangle = \mu \circ \theta(\langle x, *, *\rangle), \\ G(\langle *, *, y\rangle, 1) &= \langle *, *, y\rangle = \mu \circ \theta(\langle *, *, y\rangle), \\ G(\langle *, \langle a, s\rangle, *\rangle, 1) &= \langle *, \langle a, (1-s)1 + s\rangle, *\rangle = \langle *, \langle a, 1\rangle, *\rangle \\ &= \langle \sigma_1(f(a)), *\rangle = \mu(\langle f(a), *\rangle) = \mu \circ \theta(\langle *, \langle a, s\rangle, *\rangle). \end{aligned}$$

Assim, G é uma homotopia entre $\mu \circ \theta$ e id_O e concluímos que θ é equivalência de homotopia. □

Definição 5.19. Sejam

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"] & O \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[d, "u'"] \\ Y' \arrow[r, "v'"] & O' \end{tikzcd}$$

homotopy pushouts padrão. Suponha que existam aplicações $\alpha\colon A \to A'$, $\beta\colon X \to X'$ e $\gamma\colon Y \to Y'$ tais que $f' \circ \alpha \simeq \beta \circ f$ e $g' \circ \alpha \simeq \gamma \circ g$, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[d, "\beta"] \\ Y' & A' \arrow[l, "g'"'] \arrow[r, "f'"] & X' \end{tikzcd}$$

Então, dadas $F\colon A \times I \to X'$ homotopia entre $f' \circ \alpha$ e $\beta \circ f$ e $G\colon A \times I \to Y'$ homotopia entre $g' \circ \alpha$ e $\gamma \circ g$, definiremos

$$\Lambda_{F,G} = \Lambda\colon O \to O'$$

a aplicação dada por

$$\Lambda\langle x, *, *\rangle = \langle \beta(x), *, *\rangle,$$

$$\Lambda\langle *, *, y\rangle = \langle *, *, \gamma(y)\rangle,$$

$$\Lambda\langle *, \langle a, t\rangle, *\rangle = \begin{cases} \langle F(a, 1-3t), *, *\rangle, & \text{se } 0 \le t \le 1/3, \\ \langle *, \langle \alpha(a), 3t-1\rangle, *\rangle, & \text{se } 1/3 \le t \le 2/3, \\ \langle *, *, G(a, 3t-2)\rangle, & \text{se } 2/3 \le t \le 1, \end{cases}$$

para quaisquer $a \in A$, $x \in X$, $y \in Y$ e $t \in I$.

Note que $\Lambda \circ u = u' \circ \beta$ e $\Lambda \circ v = v' \circ \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & A' \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "g'"] & \\
& X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dd, "u"] & & X' \arrow[dd, "u'"] \\
Y \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "v"] & & Y' \arrow[dr, "v'"] & \\
& O \arrow[rr, dashed, "\Lambda=\Lambda_{F,G}"] & & O'
\end{tikzcd}$$

Nosso objetivo agora é provar que, quando α, β e γ são equivalências de homotopia, $\Lambda_{F,G}$ também é. Para isso, utilizaremos três lemas, provados em [1, Apêndice E], que enunciamos a seguir, sem demonstração.

Lema 5.20. *Sejam*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[r, "v"] & O
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[d, "u'"] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & O'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "g''"'] & X'' \arrow[d, "u''"] \\
Y'' \arrow[r, "v''"] & O''
\end{tikzcd}$$

homotopy pushouts padrão. Suponha que existam aplicações $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ e γ' tais que o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[d, "\beta"] \\
Y' \arrow[d, "\gamma'"] & A' \arrow[l, "g'"'] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"] & X' \arrow[d, "\beta'"] \\
Y'' & A'' \arrow[l, "g''"'] \arrow[r, "f''"] & X''
\end{tikzcd}$$

Sejam F, F', G e G' homotopias tais que $\beta \circ f \simeq_F f' \circ \alpha$, $\beta' \circ f' \simeq_{F'} f'' \circ \alpha'$, $\gamma \circ g \simeq_G g' \circ \alpha$ e $\gamma' \circ g' \simeq_{G'} g'' \circ \alpha'$. Defina $H\colon A \times I \to X''$ e $K\colon A \times I \to Y''$ por

$$H(a,t) = \begin{cases} F'(\alpha(a), 2t), & \text{se } t \leq 1/2, \\ \beta' \circ F(a, 2t-1), & \text{se } 1/2 \leq t, \end{cases}$$

$$K(a,t) = \begin{cases} G'(\alpha(a), 2t), & \text{se } t \leq 1/2, \\ \gamma' \circ G(a, 2t-1), & \text{se } 1/2 \leq t. \end{cases}$$

Note que $\beta' \circ \beta \circ f \simeq_H f'' \circ \alpha' \circ \alpha$ e $\gamma' \circ \gamma \circ g \simeq_K g'' \circ \alpha' \circ \alpha$. Então

$$\Lambda_{F',G'} \circ \Lambda_{F,G} \simeq \Lambda_{H,K}.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g"] & & A' \arrow[rr, "\alpha'"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "g'"] & & A'' \arrow[dr, "f''"] \arrow[dd, "g''"] & \\
& X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dd, "u"] & & X' \arrow[rr, "\beta'"] \arrow[dd, "u'"] & & X'' \arrow[dd, "u''"] \\
Y \arrow[rr] \arrow[dr, "v"] & & Y' \arrow[rr, "\gamma'"] \arrow[dr, "v'"] & & Y'' \arrow[dr, "v''"] & \\
& O \arrow[rr, "\Lambda_{F,G}"] \arrow[rrr, bend right, dashed, "\Lambda_{H,K}"'] & & O' \arrow[rr, "\Lambda_{F',G'}"] & & O''
\end{tikzcd}$$

Lema 5.21. *Sejam*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[r, "v"] & O
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[d, "u'"] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & O'
\end{tikzcd}$$

homotopy pushouts padrão. Suponha que existam aplicações $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}, \gamma$ *e* $\overline{\gamma}$ *e homotopias*

$$H_\alpha \colon A \times I \to A', \qquad H_\beta \colon X \times I \to X', \qquad H_\gamma \colon Y \times I \to Y',$$

tais que $\alpha \simeq_{H_\alpha} \overline{\alpha}$, $\beta \simeq_{H_\beta} \overline{\beta}$, $\gamma \simeq_{H_\gamma} \overline{\gamma}$ *e os diagramas a seguir comutam a menos de homotopia.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[d, "\beta"] \\
Y' & A' \arrow[l, "g'"'] \arrow[r, "f'"] & X'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\overline{\gamma}"] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\alpha}"] & X \arrow[d, "\overline{\beta}"] \\
Y' & A' \arrow[l, "g'"'] \arrow[r, "f'"] & X'
\end{tikzcd}$$

Dadas $F \colon A \times I \to X'$ *homotopia entre* $f' \circ \alpha$ *e* $\beta \circ f$ *e* $G \colon A \times I \to Y'$ *homotopia entre* $g' \circ \alpha$ *e* $\gamma \circ g$, *defina* $\overline{F} \colon A \times I \to X'$ *e* $\overline{G} \colon A \times I \to Y'$ *por*

$$\overline{F}(a,t) = \begin{cases} f' \circ H_\alpha(a, 1-3t), & \text{se } t \leq 1/3, \\ F(a, 3t-1), & \text{se } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ H_\beta(f(a), 3t-2), & \text{se } 2/3 \leq t, \end{cases}$$

$$\overline{G}(a,t) = \begin{cases} g' \circ H_\alpha(a, 1-3t), & \text{se } t \leq 1/3, \\ G(a, 3t-1), & \text{se } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ H_\gamma(g(a), 3t-2), & \text{se } 2/3 \leq t, \end{cases}$$

Então $f' \circ \overline{\alpha} \simeq_{\overline{F}} \overline{\beta} \circ f$, $g' \circ \overline{\alpha} \simeq_{\overline{G}} \overline{\gamma} \circ g$ *e temos*

$$\Lambda_{F,G} \simeq \Lambda_{\overline{F},\overline{G}}.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, shift right, "\overline{\alpha}"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & A' \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "g'"] & \\
& X \arrow[rr, shift left, "\beta"] \arrow[rr, shift right, "\overline{\beta}"'] \arrow[dd, "u"] & & X' \arrow[dd, "u'"] \\
Y \arrow[rr, shift left, "\gamma"] \arrow[rr, shift right, "\overline{\gamma}"'] \arrow[dr, "v"'] & & Y' \arrow[dr, "v'"] & \\
& O \arrow[rr, shift left, "\Lambda_{F,G}"] \arrow[rr, shift right, "\Lambda_{\overline{F},\overline{G}}"'] & & O'
\end{tikzcd}$$

Lema 5.22. *Sejam $f\colon A \to X$ e $g\colon A \to Y$ aplicações. Então, para quaisquer homotopias $H\colon f \simeq f$ e $K\colon g \simeq g$, podemos considerar $f = f \circ \mathrm{id}_A \simeq_H \mathrm{id}_X \circ f = f$ e $g = g \circ \mathrm{id}_A \simeq_K \mathrm{id}_Y \circ g = g$.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\
Y & A \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Nessas condições, podemos definir $\Lambda_{H,K}$ e temos que $\Lambda_{H,K}$ é equivalência de homotopia.

Teorema 5.23. *Nas condições da Definição 5.19, se α, β e γ são equivalências de homotopia, então $\Lambda_{F,G}$ também é.*

Demonstração. Sejam α', β' e γ' inversas homotópicas de α, β e γ respectivamente. Então,

$$\beta \circ f \circ \alpha' \simeq f' \circ \alpha \circ \alpha' \simeq f',$$

e, consequentemente, temos $f \circ \alpha' \simeq \beta' \circ f'$. Assim, podemos tomar $F'\colon A' \times I \to X$ uma homotopia entre $f \circ \alpha'$ e $\beta' \circ f'$ e, analogamente, $G'\colon A' \times I \to Y$ homotopia entre $g \circ \alpha'$ e $\gamma' \circ g'$.

Pelo Lema 5.20 temos que $\Lambda_{F',G'} \circ \Lambda_{F,G} \simeq \Lambda_{H,K}$, onde $\beta' \circ \beta \circ f \simeq_H f \circ \alpha' \circ \alpha$ e $\gamma' \circ \gamma \circ g \simeq_K g \circ \alpha' \circ \alpha$. Como $\alpha' \circ \alpha \simeq \mathrm{id}_A$, $\beta' \circ \beta \simeq \mathrm{id}_X$ e $\gamma' \circ \gamma \simeq \mathrm{id}_Y$, temos pelo Lema 5.21 que $\Lambda_{H,K} \simeq \Lambda_{\overline{H},\overline{K}}$, onde $f \circ \mathrm{id}_A \simeq_{\overline{H}} \mathrm{id}_X \circ f$, $g \circ \mathrm{id}_A \simeq_{\overline{K}} \mathrm{id}_Y \circ g$.

Pelo Lema (5.22), $\Lambda_{\overline{H},\overline{K}}$ possui inversa homotópica Λ'. Com isso, temos

$$(\Lambda' \circ \Lambda_{F',G'}) \circ \Lambda_{F,G} \simeq \Lambda' \circ \Lambda_{\overline{H},\overline{K}} \simeq \mathrm{id}_O,$$

isto é, $\Lambda_{F,G}$ possui inversa homotópica à esquerda. Analogamente, provamos que $\Lambda_{F,G}$ possui inversa homotópica à direita. $\square$

Corolário 5.24. *Nas condições da Definição 5.19, considere (P, r, s) um homotopy pushout de f e g, (P', r', s') um homotopy pushout de f' e g', $\theta\colon P \to O$ uma equivalência de homotopia tal que $\theta \circ r \simeq u$ e $\theta' \circ s \simeq v$ e $\theta'\colon O \to P'$ uma equivalência de homotopia tal que $\theta' \circ u \simeq r'$ e $\theta' \circ v \simeq s'$. Defina $\Psi = \theta' \circ \Lambda_{F,G} \circ \theta\colon P \to P'$.*

Então, se α, β e γ são equivalências de homotopia, Ψ também é.

Aplicando o Teorema 5.23 para mapping cones, temos o corolário a seguir:

Corolário 5.25. *Seja*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & X' \end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo, a menos de homotopia. Então, existe uma aplicação $\Lambda\colon C_f \to C_{f'}$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\beta"'] & C_f \arrow[d, "\Lambda"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & C_{f'} \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Seja $F\colon f'\circ\alpha \simeq \beta\circ f$ uma homotopia e tome $G\colon A\times I \to \{*\}$ a homotopia constante. Então, como

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & * \arrow[d] \\ X \arrow[r, "u"] & C_f \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & * \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "u'"] & C_{f'} \end{tikzcd}$$

são homotopy pushouts padrão, basta tomar $\Lambda = \Lambda_{F,G}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & & A' \arrow[dr] \arrow[dd, "f'"] & \\ & * \arrow[rr] \arrow[dd] & & * \arrow[dd] \\ X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "u"] & & X' \arrow[dr, "u'"] & \\ & C_f \arrow[rr, "\Lambda=\Lambda_{F,G}"] & & C_{f'} \end{tikzcd}$$

□

Definição 5.26. Dados X e Y espaços, chamamos de *join de* X *e* Y, e denotamos por $X * Y$, o espaço

$$X * Y = X \times I \times Y/\sim$$

onde a relação $\sim$ é dada por $(x,0,y) \sim (x,0,y')$, $(x,1,y) \sim (x',1,y)$ e $(*,t,*) \sim (*,t',*)$, para todo $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $t, t' \in I$.

Note que $X * Y$ é o homotopy pushout padrão das projeções $p_1\colon X \times Y \to X$ e $p_2\colon X \times Y \to Y$.

Alguns autores definem o join com a relação $\sim$ dada apenas por $(x,0,y) \sim (x,0,y')$ e $(x,1,y) \sim (x',1,y)$. Nesse caso, o join dado na definição anterior pode ser visto como um "join reduzido". Porém, como I é contrátil, verifica-se facilmente que as duas versões do join têm o mesmo tipo de homotopia.

Proposição 5.27. *Sejam* X *e* Y *espaços e considere o pushout*

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"] & X * Y \end{tikzcd}$$

Então:

1. $u \simeq *$ *e* $v \simeq *$,
2. $X * Y \simeq \Sigma(X \wedge Y)$,
3. *Se* $j_1 \colon X \to X \times Y$ *é a inclusão e* $\tilde{p_2} \colon X \times Y/X \times * \to Y$ *e* $\hat{p_2} \colon C_{j_1} \to Y$ *são induzidas de* p_2, *então* $X * Y \simeq C_{\hat{p_2}} \simeq C_{\tilde{p_2}}$.

Demonstração. Para provar o item 1, basta definir $F \colon X \times I \to X * Y$ por $F(x,t) = \langle x, t, * \rangle$ e $G \colon Y \times I \to X * Y$ por $G(y,t) = \langle *, t, y \rangle$. Daí, temos $u \simeq_F *$ e $* \simeq_G v$.

Para provar o item 2, considere $\Sigma(X \wedge Y)$ como o quociente $X \times I \times Y/\sim_1$, onde $\sim_1$ é dada por $(x,t,y) \sim_1 *$ se $x = *$, $y = *$, $t = 0$ ou $t = 1$. Denote $C = \{\langle x, t, * \rangle \in X * Y\} \cup \{\langle *, t, y \rangle \in X * Y\} \subset X * Y$. Como $C \approx CX \vee CY$, temos que C é contrátil. Pela Proposição 4.9, temos que a projeção $p \colon X * Y \to X * Y/C$ é uma equivalência de homotopia. Resta provar que $\Sigma(X \wedge Y) \simeq X * Y/C$.

Para isso, considere $X * Y/C \approx X \times I \times Y/\sim_2$ onde $\sim_2$ é dada por $(x,0,y) \sim_2 (x,0,y')$, $(x,1,y) \sim_2 (x',1,y)$, $(*,t,*) \sim_2 (*,t',*)$ e $(x,t,*) \sim_2 * \sim_2 (*,t',y)$. Como $(x,0,y) \sim_2 (x,0,*) \sim_2 *$, $(x,1,y) \sim_2 (*,1,y) \sim_2 *$, podemos simplificar a definição de $\sim_2$ para $(x,t,y) \sim_2 *$ se $x = *$, $y = *$, $t = 0$ ou $t = 1$ e, assim, concluir que as relações $\sim_1$ e $\sim_2$ coincidem. Portanto, $\Sigma(X \wedge Y) \approx X * Y/C$ e, em particular, $\Sigma(X \wedge Y) \simeq X * Y/C$ como desejado.

Por fim, para provar o item 3, considere $C_{\tilde{p_2}} = (Y \vee (X \times Y \times I))/\sim$, onde $\sim$ é dado por

$$\begin{array}{ll} (*,(x,y,1)) \sim * & (*,(x,*,t)) \sim * \\ (*,(*,*,t)) \sim * & (y,(*,*,*)) \sim (*,(x,y,0)) \end{array}$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$ e $t \in I$. Como $\langle y,(*,*,*) \rangle = \langle *,(*,y,0) \rangle \in C_{\tilde{p_2}}$, podemos reescrever $C_{\tilde{p_2}} \approx X \times Y \times I/\sim$ com $\sim$ dado por

$$(x,y,1) \sim * \qquad (x,*,t) \sim * \qquad (x',y,0) \sim (x,y,0)$$

para todo $x, x' \in X$, $y \in Y$ e $t \in I$. Como $\langle x,1,y \rangle = \langle x,1,* \rangle$ e $\langle x,0,y \rangle = \langle *,0,y \rangle$, para todo $\langle x,t,y \rangle \in X * Y$, podemos considerar $C_{\tilde{p_2}} \approx X * Y/\{\langle x,t,* \rangle \mid x \in X, t \in I\}$, e como $\{\langle x,t,* \rangle \mid x \in X, t \in I\} \simeq CX$ é contrátil, temos pela Proposição 4.9 que $C_{\tilde{p_2}} \simeq X * Y$.

Pela Proposição 5.5, existe $\alpha \colon C_{j_1} \to X \times Y/X \times *$ equivalência de homotopia entre C_{j_1} e a cofibra $X \times Y/X \times *$ de j_1, tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} C_{j_1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\hat{p_2}"'] & \dfrac{X \times Y}{X \times *} \arrow[d, "\tilde{p_2}"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Y \end{tikzcd}$$

e o resultado segue do Corolário 5.25. □

O fato enunciado na proposição a seguir (apenas afirmado, para versão "não reduzida" do join, em [11, p. 114]) nos dá uma nova caracterização do join.

Proposição 5.28. *O join* $X * Y$ *de dois espaços* X *e* Y *é homeomorfo a* $(X \times CY) \cup (CX \times Y) \subset CX \times CY$.

Demonstração. Note que, para considerar $(X \times CY) \cup (CX \times Y) \subset CX \times CY$, devemos pensar em X e Y incluídos em seus respectivos cones, isto é, não estamos fazendo distinção entre X e $X \times \{0\} \subset CX$ e entre Y e $Y \times \{0\}$. Defina $h\colon X * Y \to (X \times CY) \cup (CX \times Y)$ por

$$h\langle x, t, y\rangle = (\langle x, \max(2t-1, 0)\rangle, \langle y, \max(0, 1-2t)\rangle).$$

Note que h está bem definida, pois $h\langle x, 0, y\rangle = h\langle x, 0, *\rangle$ e $h\langle x, 1, y\rangle = h\langle *, 1, y\rangle$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Além disso, para verificar que a imagem de h realmente está contida em $(X \times CY) \cup (CX \times Y) \subset CX \times CY$, note que se $t \leq 1/2$, temos $h\langle x, t, y\rangle = (\langle x, 0\rangle, \langle y, 1-2t\rangle) \in X \times CY$. Verificamos o caso $t \geq 1/2$ analogamente.

Defina também $g\colon (X \times CY) \cup (CX \times Y) \to X * Y$ por $g(\langle x, t\rangle, \langle y, s\rangle) = \langle x, w(t, s), y\rangle$, onde $w\colon I \vee I \to I$ é dada por $w(t, 0) = (1+t)/2$ e $w(0, s) = (1-s)/2$. Verifica-se facilmente que g está bem definida e temos que g é contínua pois w também é.

Por fim, resta notar que

$$h \circ g(\langle x, t\rangle, \langle y, 0\rangle) = h\langle x, (1+t)/2, y\rangle = (\langle x, \max(t, 0)\rangle, \langle y, \max(0, -t)\rangle) = (\langle x, t\rangle, \langle y, 0\rangle),$$
$$h \circ g(\langle x, 0\rangle, \langle y, s\rangle) = h\langle x, (1-s)/2, y\rangle = (\langle x, \max(-s, 0)\rangle, \langle y, \max(0, s)\rangle) = (\langle x, 0\rangle, \langle y, s\rangle),$$
$$g \circ h\langle x, t, y\rangle = \begin{cases} g(\langle x, 0\rangle, \langle y, 1-2t\rangle) = \langle x, (1-1+2t)/2, y\rangle = \langle x, t, y\rangle, & \text{se } t \leq 1/2, \\ g(\langle x, 2t-1\rangle, \langle y, 0\rangle) = \langle x, (1+2t-1)/2, y\rangle = \langle x, t, y\rangle, & \text{se } 1/2 \leq t. \end{cases}$$

□

5.3 Pullback e Homotopy Fiber

Definição 5.29. Dadas duas aplicações $f\colon X \to A$ e $g\colon Y \to A$, um *pullback* de f e g é um espaço P tal que:

(i) existem aplicações $u\colon P \to X$ e $v\colon P \to Y$ tais que $f \circ u = g \circ v$,

(ii) para todo espaço Z e aplicações $r\colon Z \to X$, $s\colon Z \to Y$ tais que $f \circ r = g \circ s$, existe uma única aplicação t tal que $u \circ t = r$ e $v \circ t = s$, de modo que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\ & P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

A tripla (P, u, v) e o quadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

também são chamados *pullback*.

É fácil mostrar a partir do item (ii) que o pullback é único, a menos de homeomorfismo. Provaremos a seguir que ele sempre existe.

Proposição 5.30. *Dadas duas aplicações $f\colon X \to A$ e $g\colon Y \to A$, existe um pullback de f e g.*

Demonstração. Tome $P \subset X \times Y$ o subespaço

$$P = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\},$$

e denote por $u\colon P \to X$ e $v\colon P \to Y$ as restrições das projeções na primeira e na segunda coordenadas, respectivamente. Provaremos que P é um pullback de f e g.

De fato, é fácil ver que $f \circ u = g \circ v$. Além disso, dados um espaço Z e aplicações $r\colon Z \to X$, $s\colon Z \to Y$ tais que $f \circ r = g \circ s$, temos que para todo $z \in Z$, $(r \times s) \circ \Delta(z) = (r(z), s(z)) \in P$, pois $f(r(z)) = g(s(z))$. Assim, podemos definir $t\colon Z \to P$ restringindo o contradomínio de $(r \times s) \circ \Delta$, e verifica-se imediatamente que $u \circ t = r$ e $v \circ t = s$.

Por fim, dada $m\colon Z \to P$ tal que $u \circ m = r$ e $v \circ m = s$, se denotarmos $m(z) = (m_1(z), m_2(z))$, temos que para todo $z \in Z$, $r(z) = u \circ m(z) = m_1(z)$ e $s(z) = v \circ m(z) = m_2(z)$. Logo, $m(z) = (r(z), s(z)) = (r \times s) \circ \Delta(z) = t(z)$, e concluímos $m = t$. $\square$

Proposição 5.31. *Seja*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

um pullback. Se g é fibração, então u também é. Além disso, v induz homeomorfismo v' da fibra de u na fibra de g, de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F_u \arrow[r, dashed, "v'"] \arrow[d, "i"'] & F_g \arrow[d, "j"] \\ P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde i e j são as inclusões.

Demonstração. Sejam $k_t\colon Z \to X$ uma homotopia e $h\colon Z \to P$ uma aplicação tal que $u \circ h = k_0$, de modo que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "k_t"] \arrow[ur, "h"] & X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Então, $g \circ v \circ h = f \circ u \circ h = f \circ k_0$ e, como g é fibração, existe uma homotopia $h'_t\colon Z \to Y$ tal que $g \circ h'_t = f \circ k_t$ para todo $t \in I$.

Com isso, podemos definir uma homotopia $h_t\colon Z \to P$ por $h_t(z) = (k_t(z), h'_t(z))$. Note que h_t está bem definida, pois $g \circ h'_t(z) = f \circ k_t(z)$ e, assim, $h_t(z) \in P$. Para concluir que u é fibração, basta notar que $u \circ h_t = k_t$ para todo $t \in I$ e $h_0 = h$.

Como $g(v(F_u)) = f(u(F_u)) = \{*\}$, temos que $v(F_u) \subset F_g$ e podemos definir uma aplicação $v'\colon F_u \to F_g$ restringindo o domínio e o contradomínio de v. Note que, $j \circ v' = v \circ i$.

Por outro lado, tome $w\colon Y \to X \times Y$ a aplicação dada por $w(y) = (*, y)$. Note que para todo $y \in F_g$, temos $g(y) = * = f(*)$ e, portanto, $w(y) = (*, y) \in P$. Além disso, $u(w(y)) = u(*, y) = *$, isto é, $w(F_g) \subset F_u$. Assim, podemos definir $w'\colon F_g \to F_u$ restringindo o domínio e o contradomínio de w. Verifica-se facilmente que w' é inversa de v' e, portanto, v' é homeomorfismo. $\square$

Definição 5.32. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. O pullback de f e da aplicação avaliação $p\colon PY \to Y$, ilustrado no diagrama abaixo, denotado I_f, é chamado *homotopy fiber* de f.

$$\begin{tikzcd} I_f \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & PY \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Explicitamente, I_f é o espaço $\{(x, \alpha) \mid \alpha(0) = * \text{ e } \alpha(1) = f(x)\} \subset X \times Y^I$, e v e u são as projeções na primeira e na segunda coordenada, respectivamente.

Pela Proposição 4.14, sabemos que $\Omega Y \longrightarrow PY \xrightarrow{p} Y$ é uma fibração. Logo, pela Proposição 5.31, temos que a sequência $\Omega Y \longrightarrow I_f \xrightarrow{v} X$ também é uma fibração.

Como I_f é justamente a imagem inversa de $\{*\}$ pela fibração $f''\colon P_f \to Y$ da Proposição 4.17, obtemos a fibração

$$I_f \longrightarrow P_f \xrightarrow{f''} Y,$$

que justifica o nome "homotopy fiber", pois podemos interpretar, a partir da Proposição 4.17, que I_f é a fibra de uma aplicação que difere de f apenas por uma equivalência de homotopia. Outra justificativa é dada pela proposição a seguir:

Proposição 5.33. *Seja* $F \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$ *uma fibração. Então existe uma equivalência de homotopia* $\beta\colon F \to I_f$. *Além disso, se* $v\colon I_f \to X$ *é a projeção na primeira coordenada, temos que* $v \circ \beta = j$, *de modo que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} & I_f \arrow[d, "v"] & \\ F \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Demonstração. Pela Proposição 5.31, temos que $v\colon I_f \to X$ é fibração e induz um homeomorfismo $v'\colon F_u \to F$, de modo que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} F_u \arrow[r, dashed, "v'"] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "j"] \\ I_f \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "f"] \\ PY \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Como PY é contrátil, temos pela Proposição 4.15 que i é equivalência de homotopia. Então, para obter o resultado, basta definir $\beta = i \circ {v'}^{-1}$. $\square$

Proposição 5.34. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Uma aplicação $g\colon Z \to X$ possui levantamento $h\colon Z \to I_f$ se, e somente se, $f \circ g \simeq *$.*

Demonstração. Considere o pullback

$$\begin{tikzcd} I_f \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & PY \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Suponha primeiro que $g\colon Z \to X$ possui levantamento $h\colon Z \to I_f$, isto é, $v \circ h = g$. Então $f \circ g = f \circ v \circ h = p \circ u \circ h$. Mas como $PY \simeq *$, temos que $u \simeq *$ e, consequentemente, $f \circ g = p \circ u \circ h \simeq *$.

Agora, suponha que $* \simeq_F f \circ g$ para alguma homotopia $F\colon Z \times I \to Y$. Como $F(z, 0) = *$ e $F(*, t) = *$ para todo $z \in Z$ e $t \in I$, podemos definir uma aplicação $\tilde{F}\colon Z \to PY$ por $\tilde{F}(z)(t) = F(z, t)$, de modo que $p \circ \tilde{F}(z) = F(z, 1) = f \circ g(z)$ para todo $z \in Z$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{F}"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & I_f \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & PY \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Com isso, temos pela definição de pullback que existe uma aplicação $h\colon Z \to I_f$ tal que $v \circ h = g$, isto é, h é um levantamento de g. $\square$

Corolário 5.35. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $v\colon I_f \to X$ a projeção na primeira coordenada. Então a sequência*

$$I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} Y$$

é exata.

Demonstração. Tome Z um espaço qualquer e considere as aplicações $v_*\colon [Z, I_f] \to [Z, X]$ e $f_*\colon [Z, X] \to [Z, Y]$. Precisamos apenas provar que $\mathrm{Im}(v_*) = \mathrm{Ker}(f_*)$. Para isso, note que dada $[g] \in \mathrm{Im}(v_*)$, temos que $[g] = [v \circ h]$ para alguma $h\colon Z \to I_f$. Como claramente h levanta $v \circ h$, temos $f \circ (v \circ h) \simeq *$ e, consequentemente, $f_*[g] = [f \circ g] = [f \circ (v \circ h)] = [*]$. Portanto, $[g] \in \mathrm{Ker}(f_*)$ e $\mathrm{Im}(v_*) \subset \mathrm{Ker}(f_*)$.

Por outro lado, dado $[g] \in \mathrm{Ker}(f_*)$, temos $f \circ g \simeq *$ e, consequentemente, existe $h\colon Z \to I_f$ tal que $v \circ h = g$, isto é, $[g] = v_*[h] \in \mathrm{Im}(v_*)$. Portanto $\mathrm{Ker}(f_*) \subset \mathrm{Im}(v_*)$ e obtemos a igualdade desejada. $\square$

Corolário 5.36. *Qualquer fibração*

$$F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

é uma sequência exata.

Demonstração. Basta notar que, se β é a equivalência de homotopia da Proposição 5.33, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ I_f \arrow[r, "v"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

nos dá uma equivalência de sequências. O resultado segue da Proposição 2.17. □

Proposição 5.37. *Seja $f\colon X \to Y$ uma fibração. Considere os pullbacks*

$$\begin{tikzcd} I_f \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & PY \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I_v \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & PX \arrow[d, "q"] \\ I_f \arrow[r, "v"] & X \end{tikzcd}$$

e as fibrações $\Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X$ *e* $\Omega X \xrightarrow{i'} I_v \xrightarrow{v'} I_f$. *Então,* $v' \circ \beta = i$ *e* $\beta \circ (-\Omega f) \simeq i'$,

$$\begin{tikzcd} & I_v \arrow[r, "v'"] & I_f \arrow[r, "v"] & X \\ \Omega X \arrow[ur, "i'"] \arrow[r, "-\Omega f"] & \Omega Y \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "i"] & & \end{tikzcd}$$

onde $-\Omega f$ *é dada por* $(-\Omega f)(\delta)(t) = f(\delta(1-t))$ *e* β *é a equivalência de homotopia da Proposição 5.33.*

Demonstração. Obtemos $v' \circ \beta = i$ diretamente da Proposição 5.33. Para provar $\beta \circ (-\Omega f) \simeq i'$, note primeiro que $I_v = \{(x, \gamma, \delta) \mid \gamma(0) = *, \gamma(1) = f(x), \delta(0) = *, \delta(1) = v'(x, \gamma) = x\}$, i é dada por $i(\gamma) = (*, \gamma)$, i' é dada por $i'(\delta) = (*, *, \delta)$ e β é dada por $\beta(\gamma) = (i(\gamma), *) = (*, \gamma, *)$ para todo $\gamma \in \Omega Y$ e $\delta \in \Omega X$.

Defina $H\colon \Omega X \times I \to I_v$ por

$$H(\delta, t) = (\delta(1-t), t(-\Omega f)(\delta), (1-t)\delta).$$

Note que H está bem definida, pois $((1-t)\delta)(1) = \delta(1-t)$ e $(t(-\Omega f)(\delta))(1) = ((-\Omega f)(\delta))(t) = f(\delta(1-t)) = f((1-t)\delta(1))$. A verificação de que H é contínua é imediata e concluímos $\beta \circ (-\Omega f) \simeq i'$ avaliando H em $t = 0$ e $t = 1$. □

Corolário 5.38. *Dada uma aplicação $f\colon X \to Y$, considere a projeção $v\colon I_f \to X$ e a inclusão $i\colon \Omega Y \to I_f$. Então as sequências*

$$\Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} \Sigma Y$$

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} \Sigma Y$$

são exatas.

Demonstração. As sequências

$$I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} Y \qquad \Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X$$

são exatas pelos Corolários 5.35 e 5.36. Além disso, pela proposição anterior, temos que $\Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} I_f$ é exata, pois é equivalente à fibração $\Omega X \xrightarrow{i'} I_v \xrightarrow{v'} I_f$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, "-\Omega f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \Omega Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta"] & I_f \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\Omega X \arrow[r, "i'"] & I_v \arrow[r, "v'"] & I_f
\end{tikzcd}$$

Assim, para todo espaço Z, a sequência

$$[Z, \Omega X] \xrightarrow{(-\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{i_*} [Z, I_f] \xrightarrow{v_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

é exata e concluímos que a sequência

$$\Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} Y$$

é exata. Além disso, verifica-se facilmente que $(-\Omega f)_* = -(\Omega f)_*$ e, portanto, $\mathrm{Im}((\Omega f)_*) = \mathrm{Im}((-\Omega f)_*)$. Logo,

$$[Z, \Omega X] \xrightarrow{(\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{i_*} [Z, I_f] \xrightarrow{v_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

é exata e concluímos que

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} Y$$

é exata. □

Aplicando indutivamente o Corolário 3.27 sobre a sequência do corolário anterior, obtemos a sequência exata da definição a seguir:

Definição 5.39. A sequência exata

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{n+1} Y \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n I_f \xrightarrow{\Omega^n v} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n f} \Omega^n Y \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} Y$$

é chamada *sequência exata da aplicação f*.

A partir da sequência exata de f, podemos obter a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow [S^1, \Omega^{n+1} Y] \xrightarrow{(\Omega^n i)_*} [S^1, \Omega^n I_f] \xrightarrow{(\Omega^n v)_*} [S^1, \Omega^n X] \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [S^1, \Omega X] \xrightarrow{(\Omega f)_*} [S^1, \Omega Y] \xrightarrow{i_*} [S^1, I_f] \xrightarrow{v_*} [S^1, X] \xrightarrow{f_*} [S^1, Y].$$

Aplicando, repetidamente, o isomorfismo adjoint, temos que $[S^1, \Omega^n A]$ é isomorfo ao grupo $[\Sigma^n S^1, A] = [S^{n+1}, A] = \pi_{n+1}(A)$, para qualquer espaço A. Aplicando esse isomorfismo nos grupos da sequência acima, obtemos a definição a seguir:

Definição 5.40. Dada $f\colon X \to Y$ uma aplicação, a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+2}(Y) \longrightarrow \pi_{n+1}(I_f) \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_2(Y) \longrightarrow \pi_1(I_f) \xrightarrow{v_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y)$$

é chamada *sequência exata de homotopia* de f.

Dada uma fibração $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ podemos construir uma equivalência de sequências

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega E \arrow[r, "\Omega p"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \Omega B \arrow[r, "\beta' \circ i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & F \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega E \arrow[r, "\Omega p"] & \Omega B \arrow[r, "i"] & I_p \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

e obter a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow [S^1, \Omega^{n+1}B] \xrightarrow{(\Omega^n \partial)_*} [S^1, \Omega^n F] \xrightarrow{(\Omega^n j)_*} [S^1, \Omega^n E] \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [S^1, \Omega E] \xrightarrow{(\Omega p)_*} [S^1, \Omega B] \xrightarrow{\partial_*} [S^1, F] \xrightarrow{j_*} [S^1, E] \xrightarrow{p_*} [S^1, B]$$

de modo análogo ao feito para a sequência exata de uma cofibração, tomando $\partial = \beta' \circ i$, onde β' é inversa homotópica da equivalência de homotopia da Proposição 5.33. A partir do isomorfismo adjoint, obteremos a definição a seguir:

Definição 5.41. Se $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração, a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B) \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(E) \longrightarrow \pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{j_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B)$$

é chamada *sequência exata de homotopia da fibração* p.

Observação 5.42. Alertamos que a fibração $p\colon E \to B$ utilizada acima não é a aplicação, também denotada por p, utilizada na Definição 5.32 de homotopy fiber. Para evitar esse conflito, podemos mudar a notação da aplicação para p' e obter o diagrama

$$\begin{tikzcd}
I_p \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & PB \arrow[d, "p'"] \\
E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

para o homotopy fiber I_p.

Proposição 5.43. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação e considere a fibração $\Omega Y \xrightarrow{i} I_f \xrightarrow{v} X$. Se $X \times \Omega Y$ e I_f são conexos por caminhos, então são equivalentes:*

1. $f \simeq *$.

2. *Existe* $s\colon X \to I_f$ *tal que* $v \circ s \simeq \mathrm{id}_X$*, isto é,* v *possui inversa homotópica à direita.*

3. *Existe uma equivalência de homotopia* $\theta\colon X \times \Omega Y \to I_f$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega Y \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[dr, "i"] & \\
X \times \Omega Y \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "p_1"'] & & I_f \arrow[dl, "v"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

comuta a menos de homotopia, onde j_2 *é a inclusão e* p_1 *é a projeção.*

Demonstração. Considere a sequência exata

$$[X, I_f] \xrightarrow{v_*} [X, X] \xrightarrow{f_*} [X, Y].$$

Se $f \simeq *$, temos que $[X, X] = \mathrm{Ker}(f_*) = \mathrm{Im}(v_*)$, isto é, v_* é sobrejetora. Assim, existe $s\colon X \to I_f$ tal que $v_*[s] = [\mathrm{id}_X]$, isto é, $v \circ s \simeq \mathrm{id}_X$. Por outro lado, lembrando que no pullback

$$\begin{tikzcd}
I_f \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & PY \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

o espaço PY é contrátil, temos $u \simeq *$ e concluímos $f \circ v = p \circ u \simeq *$. Assim, se vale (2), temos $f \simeq f \circ v \circ s \simeq * \circ s = *$ e concluímos (1) $\iff$ (2).

Ainda supondo que vale (2), defina $\phi\colon I_f \times \Omega Y \to I_f$ por $\phi((x, \omega), \nu) = (x, \nu + \omega)$, onde $\nu + \omega\colon I \to Y$ é dada por

$$(\nu + \omega)(t) = \begin{cases} \nu(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \omega(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega Y \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[d, "k_2"] \arrow[dr, "i"] & \\
X \times \Omega Y \arrow[r, "s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}"] \arrow[dr, "p_1"'] & I_f \times \Omega Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "v \circ q_1"] & I_f \arrow[dl, "v"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

onde k_2 é a inclusão na segunda coordenada e $q_1\colon I_f \times \Omega Y \to I_f$ é projeção na primeira coordenada. Então:

- Para todo $((x, \omega), \nu) \in I_f \times \Omega Y$, temos $v \circ \phi((x, \omega), \nu) = x = v \circ q_1((x, \omega), \nu)$, isto é, $v \circ \phi = v \circ q_1$.

- Para todo $(x, \omega) \in X \times \Omega Y$, temos $v \circ q_1 \circ (s \times \mathrm{id}_{\Omega Y})(x, \omega) = v \circ s(x) = v \circ s \circ p_1(x, \omega)$, isto é, $v \circ q_1 \circ (s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) = v \circ s \circ p_1 \simeq \mathrm{id}_X \circ p_1 = p_1$.

- Para todo $\omega \in \Omega Y$, temos $(s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) \circ j_2(\omega) = (s(*), \mathrm{id}_{\Omega Y}(\omega)) = (*, \omega) = k_2(\omega)$, isto é, $(s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) \circ j_2 = k_2$.
- Para todo $\omega \in \Omega Y$, temos $\phi \circ k_2(\omega) = \phi((*,*),\omega) = (*, \omega + *)$. Defina $H\colon \Omega Y \times I \to \Omega Y$ por
$$H(\omega,t)(s) = \begin{cases} \omega((1+t)s), & \text{se } 0 \le s \le 1/(1+t), \\ *, & \text{se } 1/(1+t) \le s \le 1, \end{cases}$$
para todo $\omega \in \Omega Y$ e $s, t \in I$. Note que $\tilde{H}\colon \Omega Y \times I \to I_f$ dada por $\tilde{H}(\omega,t) = (*, H(\omega,t))$ nos dá $i \simeq_{\tilde{H}} \phi \circ k_2$.

Assim, se definirmos
$$\theta = \phi \circ (s \times \mathrm{id}_{\Omega Y})\colon X \times \Omega Y \to I_f,$$
temos a comutatividade, a menos de homotopia, do diagrama em (3).

Provemos que θ é equivalência de homotopia usando o Teorema 3.20 (de Whitehead). Se $k_1\colon I_f \to I_f \times \Omega Y$ é a inclusão na primeira coordenada e $q_2\colon I_f \times \Omega Y \to \Omega Y$ é a projeção na segunda, temos que $\mu_1\colon \pi_r(I_f) \oplus \pi_r(\Omega Y) \to \pi_r(I_f \times \Omega Y)$, dada por $\mu_1([\alpha],[\beta]) = k_{1*}[\alpha] + k_{2*}[\beta]$, é isomorfismo, uma vez que possui inversa μ_1^{-1} dada por $\mu_1^{-1}[\gamma] = (q_{1*}[\gamma], q_{2*}[\gamma])$. Da mesma forma, $\mu_2\colon \pi_r(X) \oplus \pi_r(\Omega Y) \to \pi_r(X \times \Omega Y)$, dada por $\mu_2([\alpha],[\beta]) = j_{1*}[\alpha] + j_{2*}[\beta]$ é isomorfismo, onde $j_1\colon X \to X \times \Omega Y$ é a inclusão na primeira coordenada.

Considere $\lambda\colon \pi_r(I_f) \oplus \pi_r(\Omega Y) \to \pi_r(I_f)$ dada por $\lambda([\alpha],[\beta]) = [\alpha] + i_*[\beta]$, lembrando que $i\colon \Omega Y \to I_f$ é dada por $i(\omega) = (*, \omega)$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_r(X) \oplus \pi_r(\Omega Y) \arrow[r, "s_* \oplus \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mu_2", "\simeq"'] & \pi_r(I_f) \oplus \pi_r(\Omega Y) \arrow[d, "\mu_1", "\simeq"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\
\pi_r(X \times \Omega Y) \arrow[r, "(s \times \mathrm{id})_*"] & \pi_r(I_f \times \Omega Y) \arrow[r, "\phi_*"] & \pi_r(I_f)
\end{tikzcd}$$

Para todo $([\alpha],[\beta]) \in \pi_r(X) \oplus \pi_r(\Omega Y)$, temos
$$\mu_1 \circ (s_* \oplus \mathrm{id}_{\pi_r(\Omega Y)})([\alpha],[\beta]) = k_{1*}(s_*[\alpha]) + k_{2*}[\beta] = [k_1 \circ s \circ \alpha] + [k_2 \circ \beta].$$
Por outro lado, como $(s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) \circ j_1(x) = (s(x), *) = k_1(s(x))$, temos
$$\begin{aligned}
(s \times \mathrm{id}_{\Omega Y})_* \circ \mu_2([\alpha],[\beta]) &= (s \times \mathrm{id}_{\Omega Y})_*(j_{1*}[\alpha] + j_{2*}[\beta]) \\
&= ((s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) \circ j_1)_*[\alpha] + ((s \times \mathrm{id}_{\Omega Y}) \circ j_2)_*[\beta] \\
&= (k_1 \circ s)_*[\alpha] + k_{2*}[\beta] = [k_1 \circ s \circ \alpha] + [k_2 \circ \beta],
\end{aligned}$$
isto é, o quadrado no diagrama acima é comutativo. Além disso, para todo $([\alpha],[\beta]) \in \pi_r(I_f) \oplus \pi_r(\Omega Y)$, temos
$$\phi_* \circ \mu_{1*}([\alpha],[\beta]) = (\phi \circ k_1)_*[\alpha] + (\phi \circ k_2)_*[\beta] = [\alpha] + i_*[\beta] = \lambda([\alpha],[\beta]),$$
pois já vimos que $\phi \circ k_2 \simeq i$ e a homotopia $\phi \circ k_1 \simeq \mathrm{id}_{I_f}$ é obtida analogamente. Logo, o triângulo do diagrama acima também é comutativo e concluímos que
$$\theta_* \circ \mu_2([\alpha],[\beta]) = s_*[\alpha] + i_*[\beta].$$

Dado $[\gamma] \in \pi_r(I_f)$, temos que $v_*(s_*(v_*[\gamma]) - [\gamma]) = v_* \circ s_* \circ v_*[\gamma] - v_*[\gamma] = \mathrm{id}_{\pi_r(X)} \circ v_*[\gamma] - v_*[\gamma] = [*]$. Então existe uma homotopia $g_t\colon I \to X$ com $g_0 = v \circ (s \circ v \circ \gamma - \gamma)$ e

$g_1 = *$. Como v é cofibração, existe uma homotopia $h_t\colon I \to I_f$ tal que $h_0 = s \circ v \circ \gamma - \gamma$ e $v \circ h_1 = g_1 = *$. Assim, se $u\colon I_f \to PY$ é a projeção na segunda coordenada, temos que para todo $r \in I$, $h_1(r) = (v(h_1(r)), u(h_1(r))) = (*, u(h_1(r)))$. Como $u(h_1(r))(1) = f(*) = *$, temos que $u(h_1(r)) \in \Omega Y$ e concluímos que $i(u(h_1(r))) = h_1(r)$ para todo $r \in I$, isto é, $h_1 = i \circ (u \circ h_1)$.

Assim, $s_*(v_*[\gamma]) - [\gamma] = [s \circ v \circ \gamma - \gamma] = [h_0] = [h_1] = i_*[u \circ h_1]$, e temos

$$\theta_* \circ \mu_2(v_*[\gamma], -[u \circ h_1]) = s_* \circ v_*[\gamma] - i_*[u \circ h_1] = s_*(v_*[\gamma]) - s_*(v_*[\gamma]) + [\gamma] = [\gamma],$$

de onde concluímos que $\theta_* \circ \mu_2$ é sobrejetora.

Além disso, se $\theta_* \circ \mu_2([\alpha], [\beta]) = [*]$, temos que $s_*[\alpha] = -i_*[\beta]$ e, com isso, $[\alpha] = v_*(s_*[\alpha]) = -v_*(i_*[\beta]) = [*]$. Como i_* é injetora, temos que a igualdade $[*] = \theta_* \circ \mu_2([\alpha], [\beta]) = \theta_* \circ \mu_2([*], [\beta]) = i_*[\beta]$ implica que $[\beta] = *$ e, assim, $([\alpha], [\beta]) = ([*], [*])$. Isso prova que $\theta_* \circ \mu_2$ é injetora e, portanto, um isomorfismo. Como μ_2 já é isomorfismo, temos que θ_* também é isomorfismo.

Finalmente, como θ induz isomorfismo nos grupos de homotopia, concluímos do Teorema de Whitehead que θ é uma equivalência de homotopia. Isso conclui a prova de (2) $\implies$ (3).

Por outro lado, supondo (3), basta definir $s = \theta \circ j_1$. Daí temos $v \circ s = v \circ \theta \circ j_1 \simeq p_1 \circ j_1 = \mathrm{id}_X$, e concluímos (2) $\iff$ (3). $\square$

Definição 5.44. Dados X e Y espaços, o homotopy fiber da inclusão $j\colon X \vee Y \to X \times Y$, denotado $X \flat Y$, é chamado *produto flat* de X e Y.

Explicitamente, temos que $X \flat Y = \{((x, y), \alpha) \mid \alpha(1) = j(x, y) = (x, y)\} \subset (X \vee Y) \times P(X \times Y)$. Como um elemento $((x, y), \alpha) \in X \flat Y$ qualquer pode ser escrito como $(\alpha(1), \alpha)$, temos que a associação $\alpha \mapsto (\alpha(1), \alpha)$ nos dá o homeomorfismo a seguir:

$$X \flat Y \approx \{\alpha \in P(X \times Y) \mid \alpha(1) \in X \vee Y\}.$$

Por outro lado, tomando $P(X \times Y) = PX \times PY$, temos que se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in X \flat Y$, então $\alpha(1) = (\alpha_1(1), \alpha_2(1)) \in X \vee Y$, isto é, $\alpha_1 \in \Omega X$ ou $\alpha_2 \in \Omega Y$. Assim, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega X \times PY$ ou $(\alpha_1, \alpha_2) \in PX \times \Omega Y$, e temos que $X \flat Y$ é, a menos de homeomorfismo, o espaço

$$X \flat Y \approx (\Omega X \times PY) \cup (PX \times \Omega Y).$$

Outra caracterização do flat (a menos de homotopia) é dada a seguir:

Proposição 5.45. *Dados espaços X e Y, temos que $X \flat Y \simeq \Omega X * \Omega Y$.*

Esse fato é afirmado em [6, Eq. (9)] com apenas uma sugestão de demonstração. Uma prova mais detalhada de um caso mais geral pode ser encontrada em [4, Corolário 4.7].

Podemos ilustrar a proposição anterior e o Corolário 5.6 em um único diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega X \times \Omega Y \arrow[d] & \Omega X \times \Omega Y \arrow[d] \\
\Omega X * \Omega Y \simeq X \flat Y \arrow[r] \arrow[d] & P(X \times Y) \arrow[d] \\
X \vee Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & X \times Y \arrow[d] \\
C(X \vee Y) \arrow[r] \arrow[d] & C_j \simeq X \wedge Y \arrow[d] \\
\Sigma(X \vee Y) & \Sigma(X \vee Y)
\end{tikzcd}$$

onde a fibração $\Omega X \times \Omega Y \to X \flat Y \to X \vee Y$ e a cofibração $X \times Y \to C_j \to \Sigma(X \vee Y)$ são obtidas a partir das Proposições 5.31 e 5.3 respectivamente.

5.4 Homotopy Pullback

Lembrando que A^I é o espaço das funções contínuas (não necessariamente baseadas) de I em A, com a topologia compacto-aberto e com ponto base $*\colon I \to A$, enunciamos a definição a seguir:

Definição 5.46. Dadas duas aplicações $f\colon X \to A$ e $g\colon Y \to A$, o espaço $Q = \{(x, \omega, y) \mid \omega(0) = f(x) \text{ e } \omega(1) = g(y)\} \subset X \times A^I \times Y$ é chamado *homotopy pullback padrão* de f e g. O quadrado

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

onde u é a projeção na primeira coordenada e v é a projeção na terceira, e a tripla (Q, u, v) também são chamados homotopy pullback padrão.

Se o quadrado

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

é comutativo, a menos de homotopia, e se existe uma equivalência de homotopia $\lambda\colon P \to Q$ tal que $u \circ \lambda \simeq r$ e $v \circ \lambda \simeq s$, então P, a tripla (P, s, r) e o quadrado acima são chamados homotopy pullback de f e g, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "r"] & \\
Y & Q \arrow[l, "v"] \arrow[r, "u"'] & X
\end{tikzcd}$$

De modo análogo ao feito com os homotopy pushouts, podemos mostrar que (P, s, r) é um homotopy pullback se, e somente se, existe $\lambda' \colon Q \to P$ tal que $r \circ \lambda' \simeq u$ e $s \circ \lambda' \simeq v$.

Proposição 5.47. *O homotopy pullback padrão de* $* \colon \{*\} \to A$ *e* $f \colon X \to A$ *é* I_f.

Demonstração. Se Q é o homotopy pullback padrão de f e $*$, basta notar que $h \colon I_f \to Q$, dada por $h(x, \alpha) = (x, \alpha, *)$ é um homeomorfismo. □

Proposição 5.48. *Sejam* $f \colon X \to A$ *e* $g \colon Y \to A$ *aplicações. Se* (P, r, s) *é um homotopy pullback de* f *e* g*,* Z *é um espaço e* $a \colon Z \to X$ *e* $b \colon Z \to Y$ *são aplicações tais que* $f \circ a \simeq g \circ b$ *então existe uma aplicação* $c \colon Z \to P$ *tal que* $r \circ c \simeq a$ *e* $s \circ c \simeq b$*, isto é, o diagrama a seguir comuta a menos de homotopia:*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "c"] \arrow[drr, bend left, "b"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & \\
& P \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & X \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja (Q, u, v) o homotopy pushout padrão de f e g. Defina $c' \colon Z \to Q$ por $c'(z) = (a(z), H(z, t), b(z))$, onde $H \colon Z \times I \to A$ é uma homotopia entre $f \circ a$ e $g \circ b$. A continuidade de c' segue da continuidade de a, b e H, e verifica-se facilmente que $u \circ c' = a$ e $v \circ c' = b$.

Para provar o resultado para P, tome $\lambda' \colon Q \to P$ uma equivalência de homotopia tal que $r \circ \lambda' \simeq u$ e $s \circ \lambda' \simeq v$. Então, podemos definir $c = \lambda' \circ c'$ tal que, como pode ser observado no diagrama abaixo, $r \circ c = r \circ \lambda' \circ c' \simeq u \circ c' \simeq a$ e $s \circ c = s \circ \lambda' \circ c' \simeq v \circ c' \simeq b$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "c'"] \arrow[drrr, bend left, "b"] \arrow[dddr, bend right, "a"'] & & & \\
& Q \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\lambda'"] \arrow[dd, "u"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& & P \arrow[ur, "s"] \arrow[dl, "r"] & \\
& X \arrow[rr, "f"] & & A
\end{tikzcd}$$

□

Proposição 5.49. *Se* $f \colon X \to A$ *ou* $g \colon Y \to A$ *é fibração, então o pullback* (P, r, s) *de* f *e* g *é um homotopy pullback.*

Demonstração. Suponha que g é fibração (o caso onde f fibração seguirá da simetria da proposição). Seja (Q, u, v) o homotopy pullback padrão de f e g. Defina $\alpha_a \in A^I$ o caminho dado por $\alpha_a(t) = a$ para todo $t \in I$ e $\lambda \colon P \to Q$ por $\lambda(x, y) = (x, \alpha_{f(x)}, y) = (x, \alpha_{g(y)}, y)$. Verifica-se imediatamente que $u \circ \lambda = r$ e $v \circ \lambda = s$. Resta apenas provar que λ é equivalência de homotopia.

Denotando os elementos $(y, \alpha) \in P_g$ por (α, y), podemos considerar Q como o subespaço de $X \times P_g$ dos pares $(x, (\alpha, y))$ tais que $\alpha(0) = x$.

Defina $\eta \colon P_g \to Y$ por $\eta(\alpha, y) = y$ e $\xi_t \colon P_g \to A$ por $\xi_t(\alpha, y) = \alpha(1 - t)$, para cada $t \in I$, $x \in X$ e $a \in A$. Então ξ_t é uma homotopia tal que $g \circ \eta = \xi_0$, e como g é fibração, existe homotopia $\sigma_t \colon P_g \to Y$ tal que $\sigma_0 = \eta$ e $g \circ \sigma_t = \xi_t$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ P_g \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "\xi_t"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma_t"'] & A \end{tikzcd}$$

Defina $\mu\colon Q \to P$ por $\mu(x, \alpha, y) = (x, \sigma_1(\alpha, y))$, para todo $(x, \alpha, y) \in Q$. Provaremos que μ é inversa homotópica de λ exibindo homotopias entre $\lambda \circ \mu$ e id_Q e entre $\mu \circ \lambda$ e id_P.

Defina $F\colon P \times I \to P$ por $F((x, y), t) = (x, \sigma_t(\alpha_{g(y)}, y))$, para todo $(x, y) \in P$ e $t \in I$. Veja que F é contínua e está bem definida, pois $g(\sigma_t(\alpha_{g(y)}, y)) = \xi_t(\alpha_{g(y)}, y) = g(y) = f(x)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} F(x, y, 0) &= (x, \sigma_0(\alpha_{g(y)}, y)) = (x, \eta(\alpha_{g(y)}, y)) = (x, y), \\ F(x, y, 1) &= (x, \sigma_1(\alpha_{g(y)}, y)) = \mu \circ \lambda(x, y). \end{aligned}$$

Logo, F é homotopia entre $\mu \circ \lambda$ e id_P.

Agora, defina $G\colon Q \times I \to Q$ por $G((x, \alpha, y), t) = (x, (1-t)\alpha, \sigma_t(\alpha, y))$. Note que G é contínua está bem definida, pois $\alpha((1-t)0) = \alpha(0) = f(x)$ e $\alpha((1-t)1) = \alpha(1-t) = \xi_t(\alpha, y) = g(\sigma_t(\alpha, y))$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} G((x, \alpha, y), 0) &= (x, \alpha, \sigma_0(\alpha, y)) = (x, \alpha, \eta(\alpha, y)) = (x, \alpha, y), \\ G((x, \alpha, y), 1) &= (x, 0\alpha, \sigma_1(\alpha, y)) = (x, \alpha_{f(x)}, \sigma_1(\alpha, y)) = \lambda \circ \mu(x, \alpha, y). \end{aligned}$$

Assim, G é uma homotopia entre $\lambda \circ \mu$ e id_Q e concluímos que λ é equivalência de homotopia. $\square$

6 Aplicações Cíclicas e Centrais

Os grupos de Gottlieb foram originalmente definidos como subgrupos do grupo fundamental a partir de homotopias h_t, chamadas "cíclicas", nas quais $h_0 = h_1 = \mathrm{id}$, e foram estudados detalhadamente em [8]. Mais tarde, os grupos de Gottlieb foram generalizados em [19] como o subconjunto de $[A, X]$ determinado pelas aplicações que também são chamadas "cíclicas", apesar de não haver mais a mesma interpretação do caso das homotopias. Nesse capítulo, discutiremos essas aplicações, tomando [12] como base.

Definiremos também as aplicações centrais e veremos como elas se relacionam com as aplicações cíclicas. Nesse contexto, apresentaremos uma definição do produto de Whitehead que, apesar de não ser nosso foco principal, também é um objeto de estudo importante dentro da Teoria de Homotopia.

6.1 Aplicações Cíclicas

Definição 6.1. Dizemos que uma aplicação $f\colon A \to X$ é cíclica se existe uma aplicação $F\colon X \times A \to X$ tal que $F \circ j \simeq \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$, onde $j\colon X \vee A \to X \times A$ é a inclusão.

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[r, "F"] & X \\ X \vee A \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\nabla\circ(\mathrm{id}_X\vee f)"'] & \end{tikzcd}$$

O conjunto $G(A, X) \subset [A, X]$ das classes de homotopia de aplicações cíclicas é chamado subconjunto de Gottlieb de $[A, X]$.

Note que se f é cíclica e $f \simeq g$, temos $\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee g) \simeq \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f) \simeq F \circ j$, isto é, g também é cíclica.

Para espaços com tipo de homotopia de CW-complexos, vimos que a inclusão $j\colon X \vee A \to X \times A$ é uma cofibração. Nesse contexto, a definição de aplicações cíclicas pode ser simplificada.

Proposição 6.2. *Uma aplicação $f\colon A \to X$ é cíclica se, e somente se, existe $F\colon X \times A \to X$ tal que $F \circ j = \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$.*

Demonstração. Se f é cíclica, podemos tomar $k_t\colon X \vee A \to X$ uma homotopia tal que $k_0 = F' \circ j$ para alguma $F'\colon X \times A \to X$ e $k_1 = \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$. Como j é cofibração, existe uma homotopia $h_t\colon X \times A \to X$ com $h_0 = F'$ e $h_t \circ j = k_t$ para todo $t \in I$. Assim, basta tomar $F = h_1\colon X \times A \to X$, e teremos $F \circ j = h_1 \circ j = k_1 = \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$.

Por outro lado, se existe F nas condições desejadas, obviamente temos $F \circ j \simeq \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$, e portanto f é cíclica. $\square$

Nas condições da proposição acima, F é chamada aplicação associada de f.

Observação 6.3. No caso particular em que $A = S^1$, e pensando $S^1 = I/\{0,1\}$, temos que $f \in G(S^1, X)$ se, e somente se, existe $F\colon X \times S^1 \to X$ de modo que $F(*,t) = f(t)$ e $F(x,0) = F(x,1) = x$. Em outras palavras, $f \in G(S^1, X)$ se, e somente se, f é dada por $f(t) = F(*,t)$ para alguma homotopia (não necessariamente baseada) $F\colon \mathrm{id}_X \simeq \mathrm{id}_X$ (nesse caso, f é chamada de traço de F). Essa é justamente a definição de $G(X)$ dada por D. H. Gottlieb em [8].

Proposição 6.4. *Sejam $f\colon A \to X$ uma aplicação e $j_1\colon X \to X \times A$ e $j_2\colon A \to X \times A$ as inclusões na primeira e na segunda coordenada, respectivamente. Então são equivalentes:*

1. *f é cíclica,*
2. *existe $F\colon X \times A \to X$ tal que $F \circ j_1 = \mathrm{id}_X$ e $F \circ j_2 = f$,*
3. *existe $F\colon X \times A \to X$ tal que $F \circ j_1 \simeq \mathrm{id}_X$ e $F \circ j_2 \simeq f$.*

Demonstração. Suponha f cíclica e tome F a aplicação associada de f. Então $F \circ j_1(x) = F \circ j(x,*) = \nabla(\mathrm{id}_X \vee f)(x,*) = \mathrm{id}_X(x)$ pra todo $x \in X$ e, analogamente, $F \circ j_2 = f$. Isso prova (1) $\implies$ (2). A verificação de que (2) $\implies$ (3) é imediata.

Por fim, se existe F nas condições do item (3), tome $h_t\colon X \to X$ e $k_t\colon A \to X$ homotopias tais que $F \circ j_1 \simeq_{h_t} \mathrm{id}_X$ e $F \circ j_2 \simeq_{k_t} f$. Então $\nabla \circ (h_t \vee k_t)$ é homotopia entre $\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$ e $F \circ j$, onde $j\colon X \vee A \to X \times A$ é a inclusão. De fato,

$$\nabla \circ (h_0 \vee k_0)(x,*) = h_0(x) = F \circ j_1(x), \qquad \nabla \circ (h_0 \vee k_0)(*,a) = k_0(a) = F \circ j_2(a),$$

$$\begin{aligned} \nabla \circ (h_1 \vee k_1)(x,*) &= h_1(x) = \mathrm{id}_X(x) \\ &= \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)(x,*), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \nabla \circ (h_1 \vee k_1)(*,a) &= k_1(a) = f(a) \\ &= \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)(*,a), \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ e $x \in X$. Isso mostra, por definição, que f é cíclica, e conclui (3) $\implies$ (1). □

Lema 6.5. *Sejam $f\colon A \to X$ e $\theta\colon B \to A$ aplicações. Então, se f é cíclica, $f \circ \theta$ também é.*

Demonstração. Seja $F\colon X \times A \to X$ uma aplicação tal que $F \circ j \simeq \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)$. Então se $j'\colon X \vee B \to X \times B$ é a inclusão, existe $F \circ (\mathrm{id}_X \times \theta)\colon X \times B \to X$ tal que

$$F \circ (\mathrm{id}_X \times \theta) \circ j' = F \circ j \circ (\mathrm{id}_X \vee \theta) \simeq \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f) \circ (\mathrm{id}_X \vee \theta) = \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee (f \circ \theta)).$$

$$\begin{tikzcd}
X \times B \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \times \theta"] \arrow[dr, dashed, "F \circ (\mathrm{id}_X \times \theta)"] & & X \times A \arrow[dr, "F"] & \\
& X \arrow[rr, equal] & & X \\
X \vee B \arrow[uu, "j'"] \arrow[ur, "\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee (f \circ \theta))"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \vee \theta"'] & & X \vee A \arrow[uu, "j"] \arrow[ur, "\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f)"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Considere agora uma fibração $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ e a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B,$$

lembrando que $\partial = \beta' \circ i$, onde $i\colon \Omega B \to I_p$ é a inclusão na segunda coordenada e $\beta'\colon I_p \to F$ é uma equivalência de homotopia.

Proposição 6.6. *A aplicação $\partial\colon \Omega B \to F$ é cíclica.*

Demonstração. Considere a aplicação $\phi\colon I_p \times \Omega B \to I_p$ (ver Observação 5.42) dada por $\phi((x,\omega),\nu) = (x, \nu+\omega)$, e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega B \arrow[r, "\mathrm{id}_{\Omega B}"] \arrow[d, "j_2"] & \Omega B \arrow[d, "k_2"] \arrow[dr, "i"] & & \\
F \times \Omega B \arrow[r, "\beta\times\mathrm{id}_{\Omega B}"] & I_p \times \Omega B \arrow[r, "\phi"] & I_p \arrow[r, "\beta'"] & F \\
F \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "\beta"] & I_p \arrow[u, "k_1"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_{I_p}"'] & &
\end{tikzcd}$$

onde j_1 e k_1 são inclusões na primeira coordenada, j_2 e k_2 são inclusões na segunda coordenada, e β é inversa homotópica de β'. Provamos facilmente que os quadrados comutam e provamos que os triângulos comutam da mesma forma que fizemos na demonstração da Proposição 5.43.

Portanto, denotando por $H\colon F \times \Omega B \to F$ a composta $\beta' \circ \phi \circ (\beta \times \mathrm{id}_{\Omega B})$, concluímos que $H \circ j_2 \simeq \beta' \circ i = \partial$ e $H \circ j_1 \simeq \beta' \circ \beta \simeq \mathrm{id}_F$. O resultado segue da Proposição 6.4. □

Proposição 6.7. *Seja $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} \Sigma A$ uma fibração. Se $G(A,F) = \{[*]\}$, então existe $s\colon \Sigma A \to E$ tal que $p \circ s \simeq \mathrm{id}_{\Sigma A}$.*

Demonstração. Como $\partial\colon \Omega\Sigma A \to F$ é cíclica, temos que $\partial \circ \theta$ é cíclica para qualquer $\theta\colon A \to \Omega\Sigma A$, isto é, $\partial_*[\theta] = [\partial \circ \theta] \in G(A,F)$. Logo, $\mathrm{Im}(\partial_*) \subset G(A,F) = \{[*]\}$, ou seja, ∂_* é trivial. Como a sequência

$$[A, \Omega E] \xrightarrow{(\Omega p)_*} [A, \Omega\Sigma A] \xrightarrow{\partial_*} [A, F] \xrightarrow{j_*} [A, E]$$

é exata, temos que $(\Omega p)_*$ é sobrejetora e existe $f\colon A \to \Omega E$ tal que $(\Omega p)_*[f] = \kappa_*[\mathrm{id}_{\Sigma A}]$, onde κ_* é o isomorfismo adjoint. Por fim, como o quadrado

$$\begin{tikzcd}
{[A, \Omega E]} \arrow[r, "(\Omega p)_*"] \arrow[d, shift right, "\kappa_*^{-1}"'] & {[A, \Omega\Sigma A]} \arrow[d, shift right, "\kappa_*^{-1}"'] \\
{[\Sigma A, E]} \arrow[r, "p_*"] \arrow[u, shift right, "\kappa_*"'] & {[\Sigma A, \Sigma A]} \arrow[u, shift right, "\kappa_*"']
\end{tikzcd}$$

comuta, segundo a Proposição 3.25, temos

$$\begin{aligned}
[\mathrm{id}_{\Sigma A}] = \kappa_*^{-1} \circ \kappa_*[\mathrm{id}_{\Sigma A}] = \kappa_*^{-1} \circ (\Omega p)_*[f] = \kappa_*^{-1} \circ (\Omega p)_* \circ \kappa_* \circ \kappa_*^{-1}[f] \\
= \kappa_*^{-1} \circ \kappa_* \circ p_* \circ \kappa_*^{-1}[f] = p_*(\kappa_*^{-1}[f])
\end{aligned}$$

e basta tomar s um representante de $\kappa_*^{-1}[f]$ para obter o resultado. □

Proposição 6.8. *Dado um espaço X, são equivalentes:*

1. *X é um H-espaço,*
2. *id_X é cíclica,*
3. *$G(A,X) = [A,X]$ para todo espaço A.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Seja $m\colon X \times X \to X$ uma multiplicação para X. Então $m \circ j \simeq \nabla = \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee \mathrm{id}_X)$, isto é, id_X é cíclica.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Se $f \in [A, X]$, então $f = \mathrm{id}_X \circ f$ é cíclica pelo Lema 6.5, e temos $f \in G(A, X)$.
(3) $\Longrightarrow$ (1): Como $\mathrm{id}_X \in [X, X]$ é cíclica, existe uma aplicação $m\colon X \times X \to X$ tal que $m \circ j \simeq \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee \mathrm{id}_X) = \nabla$. □

Proposição 6.9. *Sejam $f\colon A \to X$ e $g\colon B \to Y$ aplicações cíclicas. Então:*

1. *$f \times g\colon A \times B \to X \times Y$ é cíclica,*
2. *se $X = Y$, $\nabla \circ (f \vee g)\colon A \vee B \to X$ é cíclica.*

Demonstração. Sejam $F\colon X \times A \to X$ e $G\colon Y \times B \to Y$ as aplicações associadas de f e g, respectivamente.

1. Basta definir $H\colon X \times Y \times A \times B \to X \times Y$ por $H(x, y, a, b) = (F(x, a), G(y, b))$ para todo $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$, $b \in B$. Então, se $j\colon (X \times Y) \vee (A \times B) \to (X \times Y) \times (A \times B)$ é a inclusão, temos
$$H \circ j = \nabla \circ (\mathrm{id}_{X \times Y} \vee (f \times g)).$$
2. Basta definir $H\colon X \times (A \vee B) \to X$ por $H(x, a, *) = F(x, a)$ e $H(x, *, b) = G(x, b)$. Então, se $j\colon X \vee (A \vee B) \to X \times (A \vee B)$ é a inclusão, temos
$$H \circ j = \nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee \nabla \circ (f \vee g)).$$ □

Exemplo 6.10. No segundo item da proposição anterior, a composição com a aplicação folding ∇ é importante. Dadas f e g aplicações cíclicas, a aplicação $f \vee g$ não é, necessariamente, cíclica.

A aplicação $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$, por exemplo, é cíclica, pois S^1 é H-espaço, porém $\mathrm{id}_{S^1} \vee \mathrm{id}_{S^1}$ não é.

De fato, se $\mathrm{id}_{S^1} \vee \mathrm{id}_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1 \vee S^1}$ fosse cíclica, $S^1 \vee S^1$ seria H-espaço pela Proposição 6.8. Assim, $\pi_1(S^1 \vee S^1) = [S^1, S^1 \vee S^1]$ seria grupo abeliano, pelo Corolário 3.12, mas isso não é verdade, como pode ser visto em [16, Lema 60.5].

Agora, apresentamos brevemente as aplicações cocíclicas, discutidas em [13].

Definição 6.11. Dizemos que uma aplicação $f\colon X \to A$ é cocíclica se existe uma aplicação $F\colon X \to X \vee A$ tal que $j \circ F \simeq (\mathrm{id}_X \times f) \circ \Delta$, onde $j\colon X \vee A \to X \times A$ é a inclusão.

$$\begin{tikzcd} & X \vee A \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "(\mathrm{id}_X \times f) \circ \Delta"'] & X \times A \end{tikzcd}$$

Denotamos por $DG(A, X) \subset [A, X]$ o conjunto das classes de homotopia de aplicações cocíclicas.

Note que se f é cocíclica e $f \simeq g$, temos $j \circ F \simeq (\mathrm{id}_X \times f) \circ \Delta \simeq (\mathrm{id}_X \times g) \circ \Delta$, isto é, g também é cocíclica.

Lema 6.12. *Sejam $f\colon X \to A$ e $\theta\colon A \to B$ aplicações. Então, se f é cocíclica, $\theta \circ f$ também é.*

Demonstração. Seja $F\colon X \to X \vee A$ uma aplicação tal que $j \circ F \simeq (\mathrm{id}_X \times f) \circ \Delta$. Então, se $j'\colon X \vee B \to X \times B$ é a inclusão, existe $(\mathrm{id}_X \vee \theta) \circ F\colon X \to X \vee B$ tal que

$$j' \circ (\mathrm{id}_X \vee \theta) \circ F = (\mathrm{id}_X \times \theta) \circ j \circ F \simeq (\mathrm{id}_X \times \theta) \circ (\mathrm{id}_X \times f) \circ \Delta = (\mathrm{id}_X \times \theta \circ f) \circ \Delta.$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \vee B \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \vee \theta"] \arrow[dd, "j'"] & & X \vee A \arrow[dd, "j"] \\
X \arrow[ur, "(\mathrm{id}_X \vee \theta) \circ F"] \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_X \times \theta \circ f) \circ \Delta"'] & & X \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_X \times f) \circ \Delta"] & \\
 & X \times B \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \times \theta"'] & & X \times A
\end{tikzcd}$$

□

Proposição 6.13. *Dado um espaço A, são equivalentes:*

1. *A é um co-H-espaço,*
2. *id_A é cocíclica,*
3. *$DG(X, A) = [X, A]$ para todo espaço X.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Seja $c\colon A \to A \vee A$ uma comultiplicação para A. Então $j \circ c \simeq \Delta = (\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_A) \circ \Delta$, isto é, id_A é cocíclica.
(2) $\implies$ (3): Se $f \in [X, A]$, então $f = f \circ \mathrm{id}_A$ é cocíclica pelo Lema 6.12, e temos $f \in DG(X, A)$.
(3) $\implies$ (1): Tomando $X = A$, temos que $\mathrm{id}_A \in [A, A]$ é cocíclica e, portanto, existe uma aplicação $c\colon A \to A \vee A$ tal que $j \circ c \simeq (\mathrm{id}_A \vee \mathrm{id}_A) \circ \Delta = \Delta$. □

6.2 Produto de Whitehead e Aplicações Centrais

Sejam A, B e X espaços. Dadas $f\colon \Sigma A \to X$ e $g\colon \Sigma B \to X$ aplicações, denote $f' = f \circ \Sigma p_A\colon \Sigma(A \times B) \to X$ e $g' = g \circ \Sigma p_B\colon \Sigma(A \times B) \to X$, onde $p_A\colon A \times B \to A$ e $p_B\colon A \times B \to B$ são as projeções. Denote

$$k' = (-f' - g') + (f' + g')\colon \Sigma(A \times B) \to X,$$

lembrando que essa soma é induzida da estrutura de co-H-grupo da suspensão.

Como $k'|_{\Sigma(A \times *)} = (-f' - *) + (f' + *) = -f' + f' \simeq *$ e, analogamente, $k'|_{\Sigma(* \times B)} \simeq *$, temos

$$k'|_{\Sigma(A \vee B)} = k'|_{\Sigma(A \times *) \cup \Sigma(* \times B)} \simeq *.$$

Como a inclusão $\Sigma(A \vee B) \hookrightarrow \Sigma(A \times B)$ é uma cofibração, temos que existe uma aplicação $k \simeq k'$ com $k|_{\Sigma(A \vee B)} = *$ e, assim, k induz

$$\tilde{k}\colon \Sigma(A \times B)/\Sigma(A \vee B) = \Sigma(A \wedge B) \to X.$$

Definição 6.14. A classe de homotopia $[\tilde{k}]$ da aplicação $\tilde{k}$ será denotada por $[f, g]$ e será chamada *produto de Whitehead* de f e g.

Note que, quando dizemos que k induz $\tilde{k}$, afirmamos implicitamente que $k = \tilde{k} \circ \Sigma q$, onde $q\colon A \times B \to A \wedge B$ é a aplicação quociente. Isso será importante na proposição a seguir, onde provamos que o produto de Whitehead é único (ou único a menos de homotopia, quando pensamos em um representante).

Proposição 6.15. *Sejam $r, s\colon \Sigma(A\times B) \to X$ aplicações tais que $r|_{\Sigma(A\vee B)} = *$ e $s|_{\Sigma(A\vee B)} = *$. Considere as induzidas $\tilde{r}, \tilde{s}\colon \Sigma(A\wedge B) \to X$. Se $r \simeq s$ então $[\tilde{r}] = [\tilde{s}]$.*

Demonstração. Sejam $j\colon A\vee B \to A\times B$ a inclusão, $p_1, p_2\colon A\times B \to A\vee B$ dadas por $p_1(a,b) = (a,*)$ e $p_2(a,b) = (*,b)$ para todo $(a,b) \in A\times B$. Denote $p = \Sigma p_1 + \Sigma p_2$. Tomando $\Sigma(A\vee B) = \Sigma A \vee \Sigma B$, temos $(p\circ\Sigma j)|_{\Sigma A} = \mathrm{id}_{\Sigma A} + * \simeq \mathrm{id}_{\Sigma A}$ e $(p\circ\Sigma j)|_{\Sigma B} = * + \mathrm{id}_{\Sigma B} \simeq \mathrm{id}_{\Sigma B}$. Com isso, determinamos facilmente que $p\circ\Sigma j \simeq \mathrm{id}_{\Sigma(A\vee B)}$. Assim, $\Sigma p\circ\Sigma^2 j = \Sigma(p\circ\Sigma j) \simeq \Sigma\mathrm{id}_{\Sigma(A\vee B)} = \mathrm{id}_{\Sigma^2(A\vee B)}$ e temos $(\Sigma^2 j)^*\circ(\Sigma p)^* = \mathrm{id}_{[\Sigma^2(A\vee B),X]}$. Logo, $(\Sigma^2 j)^*\colon [\Sigma^2(A\times B), X] \to [\Sigma^2(A\vee B), X]$ é sobrejetora, para todo espaço X. Além disso, da sequência coexata de j, obtemos a sequência exata

$$[\Sigma^2(A\times B), X] \xrightarrow{(\Sigma^2 j)^*} [\Sigma^2(A\vee B), X] \xrightarrow{\ 0\ } [\Sigma^2(A\wedge B), X] \xrightarrow{(\Sigma q)^*} [\Sigma(A\times B), X]$$

e concluímos que $\mathrm{Ker}((\Sigma q)^*) = \{[*]\}$. Logo, $(\Sigma q)^*$ é injetora e, como

$$(\Sigma q)^*[\tilde{r}] = [\tilde{r}\circ\Sigma q] = [r] = [s] = [\tilde{s}\circ\Sigma q] = (\Sigma q)^*[\tilde{s}],$$

temos que $[\tilde{r}] = [\tilde{s}]$, como queríamos. □

Proposição 6.16. *Se X é H-espaço, então $[f,g] = [*]$ para quaisquer $f\colon \Sigma A \to X$ e $g\colon \Sigma B \to X$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.12, temos que $[\Sigma(A\times B), X]$ é abeliano. Portanto, $k' = (-f' - g') + (f' + g') \simeq *$ e temos que $[f,g] = [*]$. □

Lembre que o flat $X\flat Y$ é o subespaço de $P(X\times Y)$ dos caminhos $\alpha\colon I \to X\times Y$ tais que $\alpha(1) \in X\vee Y$. Assim, é natural definir uma aplicação avaliação $L\colon X\flat Y \to X\vee Y$ por $L(\alpha) = \alpha(1)$ para todo $\alpha \in X\flat Y$.

Lema 6.17 ([6, Lema 5.1])**.** *Sejam X e Y espaços com o tipo de homotopia de CW-complexos enumeráveis, $L\colon X\flat Y \to X\vee Y$ a avaliação e $R\colon \Sigma\Omega Z \to Z$ a aplicação dada por $R\langle\alpha,t\rangle = \alpha(t)$. Então, existe uma equivalência de homotopia ϑ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(\Omega X\wedge\Omega Y) \arrow[rrr, "{[R\circ\Sigma\Omega f, R\circ\Sigma\Omega g]}"] \arrow[d, "\vartheta"'] & & & Z \arrow[d, equal] \\
X\flat Y \arrow[r, "L"] & X\vee Y \arrow[r, "f\vee g"] & Z\vee Z \arrow[r, "\nabla"] & Z
\end{tikzcd}$$

comuta, a menos de homotopia, para quaisquer aplicações $f\colon X \to Z$ e $g\colon Y \to Z$.

Demonstração. Seja $q\colon \Omega X * \Omega Y \to \Sigma(\Omega X\wedge\Omega Y)$ a equivalência de homotopia da Proposição 5.27(2), dada por $q\langle\alpha,\beta,s\rangle = \langle\langle\alpha,\beta\rangle, s\rangle$. Considere também $W\colon \Omega X * \Omega Y \to X\flat Y$ a aplicação dada por $W\langle\alpha,\beta,s\rangle = (\min(1, 2-2s)\alpha, \min(2s,1)\beta)$, que é uma equivalência de homotopia segundo [6, p. 302].

Sendo Λ a inversa homotópica de q, tome $\vartheta = W\circ\Lambda$, e defina $H\colon (\Omega X * \Omega Y)\times I \to Z$, por

$$H(\langle\alpha,\beta,s\rangle, t) = \begin{cases} f\circ\alpha(4(s+\frac{1-t}{4})), & \text{se } s \le t/4, \\ g\circ\beta(\frac{4}{2-t}(s-\frac{t}{4})), & \text{se } t/4 \le s \le 1/2, \\ f\circ\alpha(\frac{-4}{2-t}(s+\frac{t-4}{4})), & \text{se } 1/2 \le s \le 1-t/4, \\ g\circ\beta(-4(s+\frac{t-5}{4})), & \text{se } 1-t/4 \le s. \end{cases}$$

Mostraremos que H é homotopia entre $\nabla \circ (f \vee g) \circ L \circ W$ e $[R \circ \Sigma\Omega f, R \circ \Sigma\Omega g] \circ q$. Assim teremos

$$\nabla \circ (f \vee g) \circ L \circ \vartheta = \nabla \circ (f \vee g) \circ L \circ W \circ \Lambda \simeq [R \circ \Sigma\Omega f, R \circ \Sigma\Omega g] \circ q \circ \Lambda \simeq [R \circ \Sigma\Omega f, R \circ \Sigma\Omega g],$$

o que concluirá a demonstração.

Note que, para todo $\langle \alpha, \beta, s \rangle \in \Omega X * \Omega Y$ e $t = 0$,

$$\begin{aligned} H(\langle \alpha, \beta, s \rangle, 0) &= \begin{cases} f \circ \alpha(1) = *, & \text{se } s \leq 0, \\ g \circ \beta(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ f \circ \alpha(-2s+2), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1, \\ g \circ \beta(1) = *, & \text{se } 1 \leq s, \end{cases} \\ &= \begin{cases} g \circ \beta(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ f \circ \alpha(-2s+2), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $s \leq 1/2$, temos $\min(1, 2-2s) = 1$ e $\min(2s, 1) = 2s$. Assim, nesse caso temos

$$\begin{aligned} \nabla \circ (f \vee g) \circ L \circ W \langle \alpha, \beta, s \rangle &= \nabla \circ (f \vee g) \circ L(\alpha, 2s\beta) \\ &= \nabla \circ (f \vee g)(\alpha(1), \beta(2s)) = \nabla(f(*), g(\beta(2s))) = g \circ \beta(2s). \end{aligned}$$

Logo, se $s \leq 1/2$, temos $\nabla \circ (f \vee g) \circ L \circ W \langle \alpha, \beta, s \rangle = H(\langle \alpha, \beta, s \rangle, 0)$. Mostramos a mesma igualdade para o caso $s \geq 1/2$ analogamente.

Por outro lado, para $t = 1$, temos

$$H(\langle \alpha, \beta, s \rangle, 1) = \begin{cases} f \circ \alpha(4s), & \text{se } s \leq 1/4, \\ g \circ \beta(4s-1), & \text{se } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ f \circ \alpha(-4s+3), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ g \circ \beta(-4s+4), & \text{se } 3/4 \leq s. \end{cases}$$

Denotando $H_1 \colon \Omega X * \Omega Y \to Z$ a aplicação dada por $H_1 \langle \alpha, \beta, s \rangle = H(\langle \alpha, \beta, s \rangle, 1)$ e $K \colon \Sigma(\Omega X \wedge \Omega Y) \to Z$ a aplicação dada por

$$K \langle \langle \alpha, \beta \rangle, s \rangle = \begin{cases} f \circ \alpha(4s), & \text{se } s \leq 1/4, \\ g \circ \beta(4s-1), & \text{se } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ f \circ \alpha(-4s+3), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ g \circ \beta(-4s+4), & \text{se } 3/4 \leq s, \end{cases}$$

verifica-se imediatamente que $H_1 = K \circ q$.

Além disso, denotando $f' = R \circ \Sigma\Omega f \circ \Sigma p_{\Omega X}$, onde $p_{\Omega X} \colon \Omega X \times \Omega Y \to \Omega X$ é a projeção, temos que para todo $\langle (\alpha, \beta), s \rangle \in \Sigma(\Omega X \times \Sigma Y)$, $f' \langle (\alpha, \beta), s \rangle = f \circ \alpha(s)$. Fazendo o mesmo para $g' = R \circ \Sigma\Omega g \circ \Sigma p_{\Omega Y}$, verificamos que $g' \langle (\alpha, \beta), s \rangle = g \circ \beta(s)$.

Assim, temos que $K \langle \langle \alpha, \beta \rangle, s \rangle = ((f' + g') + (-f' - g')) \langle (\alpha, \beta), s \rangle$ para todo $\alpha \in \Omega X$, $\beta \in \Omega Y$ e $s \in I$. Logo, K é induzida por $(f' + g') + (-f' - g')$ e concluímos que K é o produto de Whitehead $[R \circ \Sigma\Omega f, R \circ \Sigma\Omega g]$. Portanto, como $H_1 = K \circ q = [R \circ \Sigma\Omega f, R \circ \Sigma\Omega g] \circ q$, temos que H é, de fato, a homotopia prometida. $\square$

Aplicações Centrais

Definição 6.18. Sejam (G, m, μ) um H-grupo, A um espaço, $p_1 \colon G \times A \to G$ e $p_2 \colon G \times A \to A$ as projeções. Então, dizemos que uma aplicação $f \colon A \to G$ é central se

$$p_1 + f \circ p_2 - p_1 - f \circ p_2 \simeq *.$$

Lema 6.19. *Se $f \colon A \to G$ é central, então:*

1. *f pertence ao centro de $[A, G]$.*
2. *$f \circ \theta$ é central, para qualquer aplicação $\theta \colon B \to A$.*

Demonstração. 1. Sejam $j_1 \colon G \to G \times A$ e $j_2 \colon A \to G \times A$ as inclusões. Então, para toda $g \in [A, G]$, temos $g = p_1 \circ (g \times \mathrm{id}_A) \circ \Delta_A$ e $f = f \circ p_2 \circ (g \times \mathrm{id}_A) \circ \Delta_A$. Logo, temos

$$g + f - g - f = (p_1 + f \circ p_2 - p_1 - f \circ p_2) \circ (g \times \mathrm{id}_A) \circ \Delta_A \simeq *,$$

ou seja, $[f]$ comuta com qualquer $[g] \in [A, G]$.

2. Basta notar que

$$\begin{aligned} &p_1 + (f \circ \theta) \circ p_2 - p_1 - (f \circ \theta) \circ p_2 \\ &= p_1 \circ (\mathrm{id}_G \times \theta) + f \circ p_2 \circ (\mathrm{id}_G \times \theta) - p_1 \circ (\mathrm{id}_G \times \theta) - f \circ p_2 \circ (\mathrm{id}_G \times \theta) \\ &\qquad = (p_1 + f \circ p_2 - p_1 - f \circ p_2) \circ (\mathrm{id}_G \times \theta) \simeq * \end{aligned}$$

para toda aplicação $\theta \colon B \to A$. □

A proposição a seguir foi adaptada de [7, Proposição 2.3].

Proposição 6.20. *Sejam A e X espaços com o tipo de homotopia de CW-complexos enumeráveis e $f \colon A \to X$ uma aplicação. Então Ωf é central se, e somente se, a composta*

$$X \flat A \xrightarrow{L} X \vee A \xrightarrow{\mathrm{id}_X \vee f} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

é homotopicamente nula, onde L é a avaliação.

Demonstração. Defina $\varphi \colon \Omega X \times \Omega A \to \Omega X$ por $\varphi(\alpha, \beta) = (\alpha + f \circ \beta) + (-\alpha - f \circ \beta)$. Note que φ é justamente a aplicação $p_1 + (\Omega f) \circ p_2 - p_1 - (\Omega f) \circ p_2$ dada na definição de aplicação central. Portanto, Ωf é central se, e somente se, $\varphi \simeq *$.

Defina $\varphi' \colon \Sigma(\Omega X \times \Omega A) \to X$ por $\varphi'\langle \alpha, \beta, t \rangle = \varphi(\alpha, \beta)(t)$. Note que, pelo isomorfismo adjoint, $\kappa_*[\varphi'] = [\varphi]$ e, portanto, temos que $\varphi \simeq *$ se, e somente se, $\varphi' \simeq *$.

Denotando, como na demonstração do Lema 6.17, $f' = R \circ \Sigma\Omega f \circ \Sigma p_{\Omega A}$ e $\mathrm{id}' = R \circ \Sigma\Omega \mathrm{id}_X \circ \Sigma p_{\Omega X}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi'\langle \alpha, \beta, t \rangle &= ((\alpha + f \circ \beta) + (-\alpha - f \circ \beta))(t) \\ &= \begin{cases} \alpha(4t), & \text{se } t \leq 1/4, \\ f \circ \beta(4t - 1), & \text{se } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \alpha(-4t + 3), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ f \circ \beta(-4t + 4), & \text{se } 3/4 \leq t, \end{cases} \\ &= \begin{cases} R \circ \Sigma\Omega \mathrm{id}_X \circ \Sigma p_{\Omega X}\langle \alpha, \beta, 4t \rangle, & \text{se } t \leq 1/4, \\ R \circ \Sigma\Omega f \circ \Sigma p_{\Omega A}\langle \alpha, \beta, 4t - 1 \rangle, & \text{se } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ R \circ \Sigma\Omega \mathrm{id}_X \circ \Sigma p_{\Omega X}\langle \alpha, \beta, -4t + 3 \rangle, & \text{se } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ R \circ \Sigma\Omega f \circ \Sigma p_{\Omega A}\langle \alpha, \beta, -4t + 4 \rangle, & \text{se } 3/4 \leq t, \end{cases} \\ &= ((\mathrm{id}' + f') + (-\mathrm{id}' - f'))\langle \alpha, \beta, t \rangle. \end{aligned}$$

Logo, φ' induz o produto de Whitehead $[\mathrm{id}', f'] = [R \circ \Sigma\Omega\mathrm{id}_X, R \circ \Sigma\Omega f]$ e temos, pelo Lema 6.17, que $\varphi' \simeq *$ se, e só se, a composta $\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f) \circ L \simeq *$. □

Corolário 6.21. *Sejam A e X espaços com o tipo de homotopia de CW-complexos enumeráveis. Se $f\colon A \to X$ é cíclica então Ωf é central.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \flat A \arrow[r, "L"] \arrow[d, "u"] & X \vee A \arrow[r, "\mathrm{id}_X \vee f"] \arrow[d, hook, "j"] & X \vee X \arrow[d, "\nabla"] \\
P(X \vee A) \arrow[r, "p"] & X \times A \arrow[r, dashed, "F"] & X
\end{tikzcd}$$

onde o quadrado da esquerda é o pullback. Como f é cíclica, sabemos que existe $F\colon X \times A \to X$ de modo que o quadrado da direita comuta. Logo, $\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f) \circ L = F \circ p \circ u$ e, como $P(X \vee A)$ é contrátil, temos que $u \simeq *$ e, consequentemente, $\nabla \circ (\mathrm{id}_X \vee f) \circ L \simeq *$. O resultado agora segue da proposição anterior. □

Com esse corolário, finalizamos o texto conectando aplicações cíclicas e centrais, utilizando os dois resultados de T. Ganea apresentados nesse capítulo.

Referências

[1] M. Arkowitz. *Introduction to Homotopy Theory.* Universitext. Springer, 1 edition, 2011.

[2] R. Brown. Ten topologies for $X \times Y$. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 14, 1963.

[3] R. Brown. Function spaces and product topologies. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 15, 1964.

[4] J.-P. Doeraene. Homotopy pull backs, homotopy push outs and joins. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 5(1):15–37, 1998.

[5] R. Fritsch and R. Piccinini. CW-complexes and Euclidean spaces. Number 24 in 2, pages 79–95. 1990. Fourth Conference on Topology (Italian) (Sorrento, 1988).

[6] T. Ganea. A generalization of the homology and homotopy suspension. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 39, 1964-1965.

[7] T. Ganea. Induced Fibrations and Cofibrations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 127, 06 1967.

[8] D. H. Gottlieb. A certain subgroup of the fundamental group. *American Journal of Mathematics*, 87(4):840–856, 1965.

[9] D. H. Gottlieb. Evaluation subgroups of homotopy groups. *American Journal of Mathematics*, 91(3):729–756, July 1969.

[10] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[11] P. Hilton. *Homotopy Theory and Duality.* Notes on Mathematics and its Applications. Gordon and Breach, 1965.

[12] K. L. Lim. On cyclic maps. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 32:349, 1982.

[13] K. L. Lim. Cocyclic maps and coevaluation subgroups. *Canadian Mathematical Bulletin*, 30(1):63–71, 1987.

[14] C. R. F. Maunder. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 1 edition, 1980.

[15] J. Milnor. On Spaces Having the Homotopy Type of a CW-Complex. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90, 02 1959.

[16] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Incorporated, second edition, 2000.

[17] N. E. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *The Michigan Mathematical Journal*, 14, 5 1967.

[18] J. Strom. *Modern Classical Homotopy Theory.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2011.

[19] K. Varadarajan. Generalised Gottlieb groups. *Journal of the indian mathematical society*, 33:141–164, 1969.

[20] G. W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*, volume 61. Springer-Verlag New York, 1978.

[21] J. H. C. Whitehead. Combinatorial Homotopy. I. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 03 1949.

Índice Remissivo

aplicação, 17
  central, 84
  cíclica, 77
  cocíclica, 80
  conectante
    de uma cofibração, 54
    de uma fibração, 69, 78
  diagonal, 18
  folding, 18

cilindro reduzido, 31
co-H-espaço, 27, 81
co-H-grupo, 27
cofibra, 39
cofibração, 39
  livre, 40
cone reduzido, 31
CW-complexo, 18
  enumerável, 19
  finito, 19
  localmente enumerável, 19
  localmente finito, 19

equivalência fraca, 33
espaço, 17
  com ponto base não degenerado, 41
  de caminhos, 30
  de laços, 30

fibra, 43
fibração, 43

grupo de homotopia, 33

H-espaço, 25, 41, 79
H-grupo, 25
homotopia, 17
homotopia livre, 17
homotopy
  cofiber, 49
  fiber, 65, 74
  pullback, 73
  pullback padrão, 73
  pushout, 54
  pushout padrão, 54

isomorfismo adjoint, 34, 35

join, 61

mapping
  cone, 49, 54
  cylinder, 42
  path, 45

n-equivalência, 33

produto
  de Whitehead, 81
  flat, 72
  smash, 17
propriedade de extensão de homotopia, 19
pullback, 63
pushout, 47

sequência
  coexata, 22
  coexata de uma aplicação, 53
  de Barratt–Puppe, 53
  exata, 21, 22
  exata de homotopia
    de uma aplicação, 69
    de uma fibração, 69
  exata de uma aplicação, 68
  exata de uma cofibração, 54
subconjunto de Gottlieb, 77
suspensão reduzida, 31

Teorema de Whitehead, 33, 34