

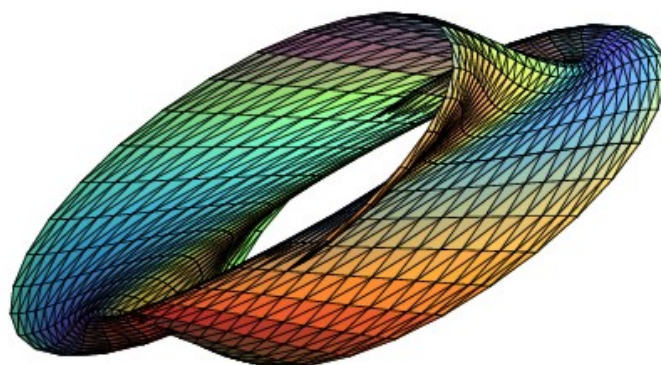
---

---

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA · BICMAT

---

---



VOLUME XV  
OUTUBRO DE 2018  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
IGCE · RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA · BICMAT

*Comissão editorial*

Carina Alves

Marta Cilene Gadotti

Nativi Viana Pereira Bertolo

Thiago de Melo

*Editoração gráfica*

Thiago de Melo

*Realização*

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE · Unesp Rio Claro

## EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática · BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de Iniciação Científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE, Unesp Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat em 2006, com ISSN 1980–024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de Iniciação Científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este volume está disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

<http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/>

ou através do código QR



## SUMÁRIO

### *Equação da Onda – A Fórmula de D’Alembert*

Daniel Borin ..... 5

### *Representação gráfica das funções complexas: é possível?*

Daniel de Lima Pazim ..... 15

### *Alguns modelos de competição entre duas espécies*

Luis Renato de Campos Damin ..... 25

### *Uma Introdução ao Estudo da Equação do Movimento Planetário*

Mateus Spadotto ..... 32

### *Grupo Fundamental*

Matheus Eduardo Dametto Silva ..... 40

# Equação da Onda – A Fórmula de D’Alembert

Daniel Borin<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** As equações diferenciais são de grande valia para a matemática aplicada dado seu imenso número de aplicações. Neste trabalho estudaremos a dedução da equação da onda submetida a forças externas de duas maneiras. Após isto, estudaremos o problema da equação da onda para uma corda infinita sem ação de forças externas cuja solução deste problema é dada pela famosa *fórmula de D’Alembert*. Forneceremos neste trabalho dois caminhos para a obtenção desta solução, sendo um deles através de uma ferramenta extremamente importante na teoria das equações diferenciais, a *Transformada de Fourier*.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, Equação da Onda, Modelagem Matemática, Fórmula de D’Alembert, Transformada de Fourier

## 1 Dedução da Equação da Onda: Uma Corda Vibrante

Considere uma corda esticada com comprimento  $L$  e suas extremidades fixas nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$  sofrendo ação de apenas uma única força, a tensão<sup>2</sup>  $T$ .

Suponhamos que o fenômeno ocorre apenas no plano  $(x, y)$  e supõe-se que a corda vibre em torno da posição de repouso ao longo do eixo  $x$ . Assim, faz-se a hipótese de que as partículas constituintes da corda se desloquem apenas na direção do eixo  $y$ , desta forma denominamos o movimento como *vibração transversal*.

A corda em questão é perfeitamente elástica de maneira a não exibir resistência a suas deformações, chamando a corda de *flexível*.

Após todas as hipóteses do problema estamos preparados para atacá-lo. Vale ressaltar que em um determinado instante de tempo fixo  $t$  a configuração da corda será dada pela Figura 1, onde  $\theta$  é o ângulo da tangente à corda com o eixo das abcissas.

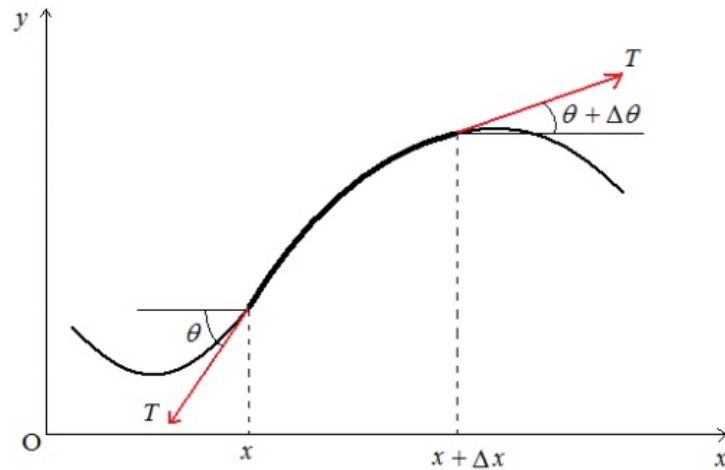
Para deduzir a equação diferencial parcial da onda utilizamos a forma original da 2<sup>o</sup> lei de Newton<sup>3</sup> que diz o seguinte:

**Segunda Lei de Newton.** A derivada com relação ao tempo do momentum linear da partícula é igual a soma das forças aplicadas sobre elas.

<sup>†</sup>Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (2017/03686-1)

<sup>2</sup>Mais precisamente por um par de tais forças.

<sup>3</sup>Sir ISAAC NEWTON (1642?1727), grande físico e matemático inglês, tornou-se professor da Universidade de Cambridge em 1669 e Diretor da Casa da Moeda de seu país em 1699. Ele e o matemático e filósofo alemão GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646?1716) inventaram (independentemente) o cálculo diferencial e integral. Newton descobriu diversas leis físicas básicas e criou o método de investigação de problemas físicos através do cálculo. Sua obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, 1687) contém o desenvolvimento da mecânica clássica. Suas contribuições são de grande importância tanto para a física quanto para a matemática.

FIGURA 1: Configuração da corda num dado instante  $t$ .

Considerando uma distribuição linear de massa dada por  $\rho(x) = \frac{dm}{dx}$ . Temos que a massa do pequeno segmento de corda  $\Delta x$  é

$$\Delta m = \rho(x)\Delta x.$$

Logo, o *momentum* linear é dado por

$$\vec{p} = \rho(x)\Delta x \hat{y}, \quad (1.1)$$

onde  $\hat{y}$  é o versor na direção de  $y$ .

Além das forças de tensão, o sistema pode estar sujeito a forças externas de modo a intensificar ou prejudicar em determinado instante a vibração transversal, como por exemplo a gravidade (que usualmente é desprezível, a menos que a tração seja muito pequena), a resistência ao movimento oposta pelo meio onde está a corda, etc. Existindo então uma força vertical adicional por unidade de comprimento, agindo ao longo da corda, podemos expressar o vetor força externa da seguinte forma

$$\vec{F}_{ext} = h_1(x, y, t)\Delta x \hat{y}.$$

Assim, escrevendo a 2ª lei de Newton por componentes temos, para o sistema proposto, que

$$\begin{cases} T(x + \Delta x, t) \cos(\theta(x + \Delta x, t)) = T(x, t) \cos(\theta(x, t)), & (1.2) \\ T(x + \Delta x, t) \sin(\theta(x + \Delta x, t)) - T(x, t) \sin(\theta(x, t)) + h_1\Delta x = \rho(x)\Delta x \ddot{y}, & (1.3) \end{cases}$$

onde  $\theta(x + \Delta x, t) = \theta + \Delta\theta$ . Da equação (1.2) concluímos que a componente horizontal da tensão independe da posição  $x$ , dependendo apenas do tempo, desta forma renomearemos como  $T(t)$ , i.e.,

$$T(t) = T(x + \Delta x, t) \cos(\theta(x + \Delta x, t)) = T(x, t) \cos(\theta(x, t)). \quad (1.4)$$

Isolando  $T(x, t)$  e  $T(x + \Delta x, t)$  de (1.4), obtemos

$$\begin{cases} T(x + \Delta x, t) = \frac{T(t)}{\cos(\theta(x + \Delta x, t))}, & (1.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x, t) = \frac{T(t)}{\cos(\theta(x, t))}. & (1.6) \end{cases}$$

Substituindo (1.5) e (1.6) em (1.3), obtém-se

$$T(t) \tan(\theta(x + \Delta x, t)) - T(t) \tan(\theta(x, t)) + h_1(x, y, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \ddot{y}. \quad (1.7)$$

Lembrando que o coeficiente angular da reta tangente a uma função em um dado ponto do seu domínio é igual a derivada da função neste ponto. Podemos então escrever

$$T(t) \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right) + h_1(x, y, t)\Delta x = \rho(x)\ddot{y}\Delta x. \quad (1.8)$$

Agora, como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$  em (1.8), segue que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + h(x, y, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

onde  $\alpha^2 = \alpha^2(x, y) = \frac{1}{v^2} = \frac{\rho(x)}{T(t)}$ , em que  $v$  é a velocidade de propagação da onda. Note que a velocidade de propagação aumenta com a tensão na corda e diminui com a sua inércia (massa por unidade de comprimento). A contribuição da força externa é dada por  $h(x, y, t) = \frac{h_1(x, y, t)}{\rho(x)}$ .

**Observação 1.1.** Para um sistema em vibração com mais de uma coordenada espacial, pode ser necessário considerar a equação de onda em duas dimensões,

$$v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + h = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou em três dimensões,

$$v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + h = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Uma outra maneira de deduzir a equação da onda é utilizando-se apenas de densidades. Designando por  $h_1(x', y, t)$  a densidade linear dessas forças ao longo da corda, a força externa é dada por

$$\vec{F}_{ext} = \int_x^{x+\Delta x} h_1(x', y, t) dx'. \quad (1.10)$$

De maneira análoga, podemos reescrever o momentum da corda da seguinte forma

$$\vec{P}(t) = \int_x^{x+\Delta x} \vec{p}(t) dx' = \int_x^{x+\Delta x} \rho(x') \frac{\partial y}{\partial t}(x', t) dx' \hat{y}. \quad (1.11)$$

Procedendo de maneira análoga à dedução da equação da onda realizada anteriormente<sup>4</sup>, temos que a resultante vertical das forças de tensão atuando sobre o trecho da corda entre os pontos de abscissa  $x$  e  $x + \Delta x$  é

$$T(t) \tan(\theta + \Delta\theta) - T(t) \tan\theta = T(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x', t) \Big|_{x'=x}^{x'=x+\Delta x} = \int_x^{x+\Delta x} T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (1.12)$$

Pela Segunda Lei de Newton para a componente vertical e utilizando as expressões (1.10), (1.11) e (1.12), temos

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho(x') \frac{\partial y}{\partial t}(x', t) dx' = \int_x^{x+\Delta x} T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x', t) dx' + \int_x^{x+\Delta x} h_1(x', t, u) dx'. \quad (1.13)$$

Antes de prosseguirmos, considere a proposição enunciada a seguir que será utilizada nos próximos cálculos.

**Proposição 1.2** (Regra de Leibniz). *Suponhamos  $f(x, t)$  uma função real definida num retângulo  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  integrável em  $x$  para cada valor real de  $t$  e que  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$  seja uma função contínua em  $\mathbb{R}$ . A derivada da integral*

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

é dada por

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx. \quad (1.14)$$

**Prova:** Seja  $h \neq 0$ , pequeno o suficiente, de forma que  $t + h \in [c, d]$  para  $t \in [c, d]$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{I(t+h) - I(t)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right] dx \\ &\stackrel{\text{T.V.M.}}{=} \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial t}(x, \bar{t}) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right] dx, \end{aligned}$$

para algum  $\bar{t}$  entre  $t$  e  $t + h$ . Pela continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial t}$  no retângulo  $R$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que

$$\left| \frac{I(t+h) - I(t)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \text{se } 0 < |h| < \eta.$$

Portanto, tomando  $\eta$  infinitesimal obtemos (1.14). O que conclui a prova.  $\square$

Retornando ao problema, vamos supor que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$  seja contínua, pela Proposição 1.2, i.e., pela Regra de Leibniz, podemos levar a derivada  $\frac{d}{dt}$  para dentro da integral em (1.13). E, como  $x$  e  $x + \Delta x$  são arbitrários podemos desprezar a integral, obtendo

$$\rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + h_1(x, y, t), \quad (1.15)$$

<sup>4</sup>Procedimento utilizado para chegar da equação (1.2) para (1.7)



ou seja,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + h(x, y, t), \quad (1.16)$$

onde  $v^2(x, t) = \frac{T(t)}{\rho(x)}$  e  $h(x, t, u) = \frac{h_1(x, t, u)}{\rho(x)}$ .

Existem diversas generalizações da equação da onda. Uma equação importante, conhecida como a **equação do telégrafo**, tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + ku = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

onde  $b$  e  $k$  são constantes. Os termos  $b\partial_t u$ ,  $ku$  e  $F(x, t)$  correspondem, respectivamente, a uma força amortecedora viscosa (Lei de Stokes), uma força restauradora elástica (Lei de Hooke) e a uma força externa. Note que a equação do telégrafo é similar à equação diferencial do oscilador harmônico amortecido forçado, exceto pelo termo adicional  $v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  simbolizando a ação das forças elásticas internas.

De maneira análoga a equação do oscilador harmônico, a equação do telégrafo também governa o fluxo de tensão, ou corrente, em uma linha de transmissão; neste caso os coeficientes estão relacionados a parâmetros elétricos da linha.

## 2 Problema Proposto

Enunciaremos agora um problema envolvendo a equação da onda. Consideremos um sistema sem ação de forças externas e que no instante  $t = 0$  a onda possa ser descrita pela função  $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$  e sua velocidade vertical pela função  $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ . Consideremos também que a corda tenha comprimento infinito, i.e., uma *idealização matemática* para o caso de uma corda muito comprida.

Assim, estudaremos o seguinte problema de Cauchy:

**Aplicação 1.** Sejam  $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ . Então o PVI consiste em buscar uma função  $y(x, t)$  definida no semiplano fechado,  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ y(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

A solução deste problema é dada pela fórmula de D’Alembert descrita pela seguinte expressão

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + vt) + f(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds. \quad (2.2)$$

Analisando a fórmula de D’Alembert, vemos que o valor da solução  $y$  do problema de Cauchy (2.1) no ponto  $(x, t)$  depende dos valores dos dados iniciais no intervalo  $[x - vt, x + vt]$ , que é chamado intervalo de dependência do ponto  $(x, t)$ .

### 3 Resolução do Problema

A proposição a seguir mostra uma forma para encontrar a solução do problema (2.1).

**Proposição 1.3.** *Se  $y(x, t)$  satisfizer a equação das ondas,*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

onde  $v$  é constante, então existirão funções  $F$  e  $G$  reais de variável real, i.e.,  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que

$$y(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (3.1)$$

**Prova:** Introduzimos novas variáveis independentes  $\xi, \eta$  dadas por:

$$\xi = x + vt, \quad \eta = x - vt$$

e definimos a função  $w$  por:

$$w(\xi, \eta) = w(x + vt, x - vt) = y(x, t).$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} v^2 - 2v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

que levando à equação das ondas nos fornece

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrando-a obtém-se

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = F_1(\xi)$$

e desta,

$$w = \int F_1(\xi) d\xi + G(\eta).$$

O resultado se segue chamando de  $F(\xi)$  uma das primitivas de  $F_1$  e voltando às variáveis  $x, t$ .  $\square$

Assim, para obter a solução do problema de Cauchy para a equação da onda devemos apenas determinar as funções  $F$  e  $G$ , usando as condições iniciais. Sendo  $y(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt)$ , aplicando as condições iniciais obtemos

$$y(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = vF'(x) - vG'(x) = g(x).$$

Integrando a última expressão ficamos com

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{v} \int_0^x g(s) ds, \quad (3.3)$$

das equações (3.2) e (3.3) temos um sistema onde as incógnitas são as funções  $F$  e  $G$ , cuja solução nos fornece

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x g(s) ds$$

e

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x g(s) ds.$$

Portanto,

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + vt) + f(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} g(s) ds - \frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} g(s) ds.$$

Invertendo o sinal de integração do último termo da expressão acima, obtemos a Fórmula de D’Alembert.

#### 4 Resolvendo o Problema por Transformada de Fourier

Uma outra maneira de chegar a fórmula de D’Alembert é através da *Transformada de Fourier*. Esta transformada integral possui diversas definições, a que consideraremos neste trabalho esta definida a seguir:

**Definição 1.4.** A transformada de Fourier de uma função  $f$ , onde  $f$  é uma função contínua, suave por partes e absolutamente integrável será considerada como sendo

$$F(k) \equiv \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

logo sua inversa é

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx.$$

Uma propriedade importante desta ferramenta ocorre quando se calcula a transformada de uma derivada, que utilizaremos posteriormente. Esta propriedade está enunciada a seguir cuja demonstração iremos omitir pois vem direto da aplicação da definição integrando-a por partes.

**Proposição 1.5 (Diferenciação).** *Seja  $f(x)$  uma função contínua e suave por partes em  $(-\infty, \infty)$ . Se  $f(x)$  e  $f'(x)$  são absolutamente integráveis, então*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)].$$

Aplicando a transformada na equação da onda e nas condições, obtemos o seguinte “problema transformado”

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{F}[y(x, t)]}{\partial t^2} = -v^2 k^2 \mathcal{F}[y(x, t)], \\ \mathcal{F}[y(x, 0)] = \mathcal{F}[f(x)], \\ \mathcal{F}\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)\right] = \mathcal{F}[g(x)]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Implicando na equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}[y(x, t)]}{\partial t^2} + v^2 k^2 \mathcal{F}[y(x, t)] = 0,$$

cujas soluções são

$$\mathcal{F}[y(x, t)] = c_1 \cos(kvt) + c_2 \operatorname{sen}(kvt).$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são obtidas aplicando as condições iniciais, sendo elas

$$c_1 = \mathcal{F}[f(x)] \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\mathcal{F}[g(x)]}{kv}.$$

Portanto,

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left( \mathcal{F}[f(x)] \cos(kvt) + \frac{\mathcal{F}[g(x)]}{kv} \operatorname{sen}(kvt) \right) dk. \quad (4.2)$$

Dividimos então a integral acima em duas para facilitar a resolução. Escrevendo o cosseno através da exponencial complexa, a solução da primeira integral é

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(x)] \left( \frac{e^{ik(x+vt)} + e^{ik(x-vt)}}{2} \right) dk = \frac{f(x+vt) + f(x-vt)}{2}.$$

Agora, seja uma função  $h(x, t)$  tal que

$$\mathcal{F}[h(x, t)] = \frac{\operatorname{sen}(kvt)}{kv} \mathcal{F}[g(x)]$$

manipulando, obtém-se

$$ik \mathcal{F}[h(x, t)] = \frac{e^{ikvt} - e^{-ikvt}}{2v} \mathcal{F}[g(x)].$$

Utilizando a Proposição da Diferenciação, obtemos

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right] = \frac{e^{ikvt} - e^{-ikvt}}{2v} \mathcal{F}[g(x)].$$

Aplicando a transformada inversa obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) = \frac{1}{2v} (g(x+vt) - g(x-vt)).$$

Assim,

$$h(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds.$$

Logo, a segunda integral de (4.2) se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\mathcal{F}[g(x)]}{kv} \operatorname{sen}(kvt) dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathcal{F}[h(x, t)] dk \\ &= h(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto, a solução é dada por

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + vt) + f(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds$$

que é a fórmula de D’Alembert.

## 5 Conclusão

Apesar do tamanho, a resolução através da transformada de Fourier consiste de passos mais simples e óbvios enquanto que a outra solução consiste em ter uma “sacada”, que é ver a solução como descrito na Proposição 1.3. Apesar disso vemos que independente do caminho a solução da fórmula de D’Alembert é válida, sendo possível utilizar esta para outros problemas do gênero com apenas algumas modificações.

**Agradecimentos:** Agradeço a Deus primeiramente, por todas as oportunidades que ele me proporcionou até aqui. Agradeço aos meus pais, Antonio Valdeci Borin e Eva Aparecida Ribeiro Borin, pois sem eles, não teria chegado até onde cheguei e muito menos teria escrito este artigo, vocês são os meus alicerces, que me sustentam em todas as dificuldades da vida, não há palavras para descrever o quanto sou grato a vocês. Agradeço a Franciele Horácio de Souza, que sempre me apoiou e acompanhou de perto o meu esforço, estando sempre ao meu lado. Agradeço a Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti por suas sábias palavras de incentivo, por sua paciência, apoio durante a realização do projeto; e além de ser apenas uma orientadora, tornou-se uma companheira, e sempre acreditou em mim e no meu potencial apesar de todas as diversidades. Agradeço também a Prof. Dra. Francesca Dalbono da Università degli Studi di Palermo pelo tempo dedicado a mim durante o período que estive sob sua orientação em Palermo. Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, por seu apoio financeiro para o desenvolvimento de minha pesquisa. Dedico este trabalho a todos os que, de maneira direta ou indireta, cooperaram para que eu chegasse até aqui.

*Abstract: Differential equations are of great value for applied mathematics given their immense number of applications. In this work we study the deduction of the wave equation subjected to external forces. After this, we will study the problem of the equation of the wave for an infinite string without action of external forces whose solution of this problem is given by the famous D’Alembert’s formula. We will provide in this work two ways to obtain this solution, being one of them through an extremely important tool in differential equation theory, the Fourier transform.*

*Keywords: Differential equations, Wave equation, Mathematical modeling, D’Alembert’s formula, Fourier transform*

## Referências Bibliográficas

- [1] M. ALONSO e E. J. FINN, *Fundamental University Physics: Volume II, Fields and Waves*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Washington D.C., 1966.
- [2] G. B. ARFKEN, e H. J. WEBER, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed., Boston, New Delhi: Elsevier, 2005.
- [3] D. G. FIGUEIREDO, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [4] C.E. OLIVEIRA e E.J. MAIORINO, *Introdução ao métodos da matemática aplicada*, 2º edição, Editora Unicamp, Campinas, 2003.
- [5] K. R. SYMON, *Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.

# Representação gráfica das funções complexas: é possível?

Daniel de Lima Pazim

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** Este trabalho apresenta um estudo sobre o comportamento geométrico das funções exponencial, raiz quadrada e seno quando o seu domínio é estendido dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) para os complexos ( $\mathbb{C}$ ), além de apresentar alguns contrastes interessantes se comparadas essas funções com domínio real e com domínio complexo.

**Palavras-chave:** exponencial complexa; raiz complexa; seno complexo; transformação no plano.

## Introdução

A Matemática utiliza com grande frequência gráficos e figuras, uma vez que estes representam uma importante ferramenta para análise e interpretação de dados, oferecendo uma visão ampla da situação problema.

A representação geométrica das funções definidas no conjunto dos números reais  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é possível e conhecida.

Neste trabalho iremos estudar três funções definidas em  $\mathbb{C}$ : exponencial ( $e^z$ ), raiz quadrada ( $\sqrt{z}$ ) e trigonométrica ( $\sin z$ ). Serão definidas e comparadas em domínios real e complexo.

## 1 Função exponencial

### 1.1 Função exponencial real

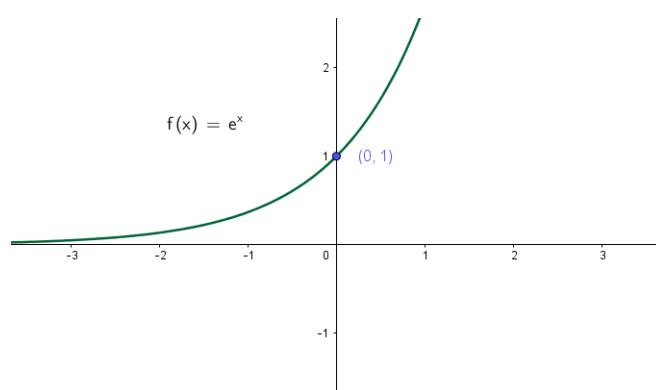


FIGURA 1: Função exponencial real

**Definição 1.1.** Chama-se função exponencial a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $f(x) = a^x$  em que  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a \neq 1$ . O número  $a$  é chamado de base da função. Uma das bases mais importantes da função exponencial é quando  $a = e$ , onde a função recebe o nome de função exponencial natural.

## 1.2 Função exponencial complexa

É conhecido do Cálculo Integral que a função  $e^x$  pode ser representada pela série de McLaurin por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Usando ferramentas da Análise Complexa, podemos demonstrar que essa série se estende para os números complexos. Portanto, iremos substituir a variável  $x$  pela variável complexa  $yi$ , onde  $i$  é a unidade imaginária. Deste modo:

$$e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = 1 + (yi) + \frac{(yi)^2}{2} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \dots \quad (1.1)$$

lembrando do valor das potências de  $i$ ,

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -i, \quad i^{4k+3} = -1$$

e reagrupando a série anterior, obtemos:

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right).$$

Repare que, desse modo, dividimos a série (1.1) em duas outras e que:

$$\cos y = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right),$$

$$\text{sen } y = \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right).$$

Então, podemos reescrever a série da seguinte forma:

$$e^{yi} = \cos y + i \text{sen } y. \quad (1.2)$$

**Definição 1.2.** Chama-se função exponencial complexa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$w = f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \text{sen } y), \text{ para todo } z = x + yi \in \mathbb{C}.$$

Se denotarmos,  $w = u + vi$ , teremos  $u = e^x \cos y$  e  $v = e^x \text{sen } y$ .

**Proposição 1.3.** Para quaisquer  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , as seguintes propriedades são válidas:

$$(P1) \quad |e^z| = e^x;$$

$$(P2) \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2};$$

$$(P3) \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2};$$

$$(P4) \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z};$$

$$(P5) \quad z = r e^{i\theta}.$$



**Prova:** Provemos cada uma das propriedades.

(P1) Mostremos que  $|e^z| = e^x$

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = e^x \sqrt{\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y} = e^x.$$

(P2) Mostremos que  $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(P3) Mostremos que  $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1-x_2}[\cos(y_1 - y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 - y_2)] = e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} = e^{(x_1+y_1i)-(x_2+y_2i)} \\ &= e^{z_1-z_2}. \end{aligned}$$

(P4) Mostremos que  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

$$e^{-z} = e^{0-z} = \frac{e^0}{e^z} = \frac{1}{e^z}.$$

(P5) Mostremos que  $z = re^{i\theta}$ . De fato, basta substituir  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ .  $\square$

Trataremos a seguir da função exponencial na sua representação polar. Considere  $e^z = (R, \theta)$ ;

$$R = |e^z| = e^x$$

$$\tan \theta = \tan y \iff \theta \equiv y \pmod{2\pi}$$

### Estudo geométrico

Vamos agora para o estudo geométrico da função exponencial, isto é, analisaremos uma região do seu domínio. Para esta análise, tomaremos as retas verticais e horizontais (que formam uma malha no  $w$ -plano) e veremos onde essas retas são levadas pela transformação  $w = e^z$ .

Para retas verticais onde  $x$  é constante, ou seja,  $x = x_0$ , temos

$$u^2 + v^2 = (e^{x_0})^2$$

o que representa a equação de uma circunferência centrada na origem de raio  $e^{x_0}$ . Repare que valores diferentes de  $x$  resultam em raios diferentes de circunferências centradas na origem.

Para pontos  $(x, y)$  com  $y$  constante, isto é, retas horizontais  $y = y_0$  e  $x$  variando, o argumento  $\theta$  se mantém e o módulo  $R$  varia de 0 a  $\infty$ , formando assim uma semirreta com origem em  $(0,0)$ . Quando  $y = 0$  recupera-se a função exponencial real que terá como imagem a semirreta positiva  $Ou$  do  $w$ -plano. Note também que valores de  $y_0$  diferentes resultam em argumentos diferentes, ou seja, semirretas distintas.

A figura a seguir foi retirada da referência [1]

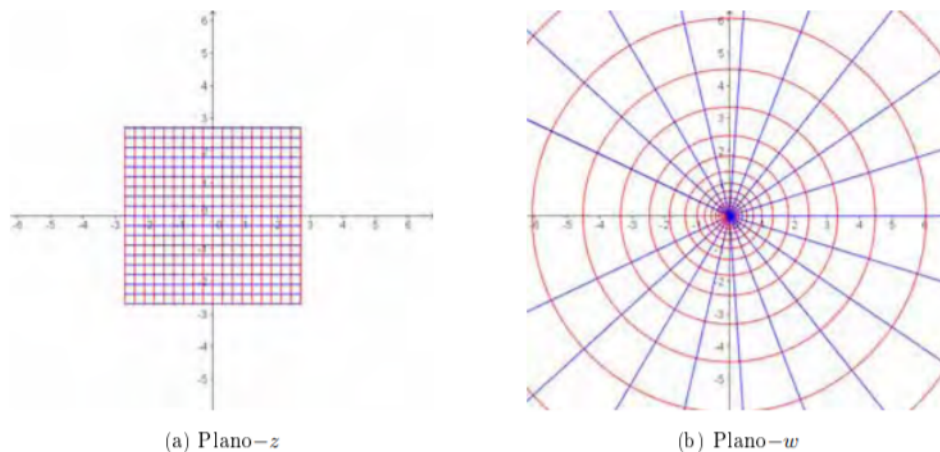


FIGURA 2: Função exponencial complexa

**Observação 1.4.** Uma diferença fundamental entre a função exponencial complexa e real é que a complexa,  $e^z$ , é periódica em  $\mathbb{C}$ .

**Definição 1.5.** Uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é periódica se existe uma constante  $z_0 \in \mathbb{C}$ , não nula, tal que  $f(z + z_0) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . A constante  $z_0$  é chamada de período da função.

**Teorema 1.6.** A função  $e^z$  é periódica em  $\mathbb{C}$ , com período  $2\pi i$ . Além disso, qualquer outro período será da forma  $z_0 = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $k \neq 0$ .

**Prova:** 1ª parte

$$f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z = f(z).$$

2ª parte

Seja  $z_0 = x_0 + iy_0$  um período qualquer de  $e^z$ , então

$$f(z + z_0) = e^{z+z_0} = e^z e^{z_0} = e^z \iff e^{z_0} = 1.$$

Logo,

$$\begin{cases} e^{x_0} \cos y_0 = 1 \\ e^{x_0} \operatorname{sen} y_0 = 0 \end{cases}$$

Isso ocorre apenas quando  $\tan y_0 = 0 \iff y_0 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $z_0 = 2k\pi i$ . □

## 2 Função raiz quadrada

### 2.1 Função raiz quadrada real

**Definição 1.7.** A função raiz quadrada é dada por  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, \infty]$ . Seu domínio e sua imagem são todos os números não negativos.

### 2.2 Função raiz quadrada complexa

Para o estudo da função raiz quadrada complexa é necessário primeiro definirmos função inversa de uma função complexa.

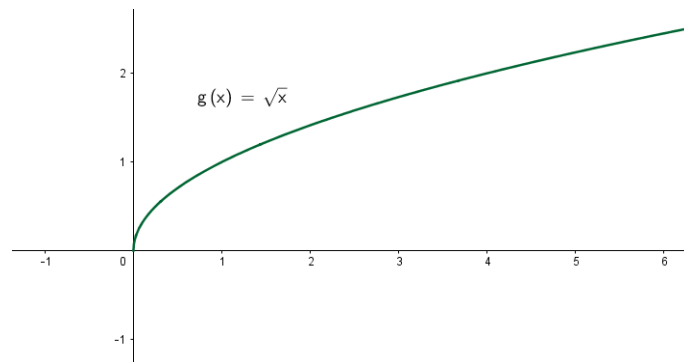


FIGURA 3: Raiz quadrada real

**Definição 1.8.** Seja  $f : D(f) \subset \mathbb{C} \rightarrow Im(f) \subset \mathbb{C}$ , onde  $D(f)$  é o domínio de  $f$  e  $Im(f)$  é a imagem de  $f$ . A função  $f^{-1} : Im(f) \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfaz  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$ , sendo  $Id$  a função identidade, é denominada função inversa de  $f$  quando existir.

**Observação 1.9.** Uma função somente terá inversa se for bijetora.

Dada a função  $f(z) = z^2$ , queremos determinar a função inversa  $f^{-1}$  tal que  $f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$ . O que equivale:

$$f \circ f^{-1}(z) = f(f^{-1}(z)) = [f^{-1}(z)]^2.$$

Assim, a função  $f^{-1}$  desejada é tal que  $[f^{-1}(z)]^2 = z$ .

Observa-se que se  $w = f^{-1}(z)$  é uma solução, isto é,  $w^2 = z$ , então  $(-w)$  também satisfaz  $(-w)^2 = z$ . Sejam  $w = f^{-1}(z) = u + vi$  e  $z = x + yi$  dois complexos. Então

$$(u + vi)^2 = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases} \quad (2.1)$$

Supondo  $y \neq 0$  temos, por (2.1), que  $u \neq 0$ . Desse modo,  $v = \frac{y}{2u}$  onde substituindo na primeira igualdade de (2.1),

$$u^2 - \frac{y^2}{4u^2} = x \Rightarrow \frac{4u^4 - y^2}{4u^2} = x.$$

Logo,

$$4u^4 - 4u^2x - y^2 = 0.$$

Note que essa é uma equação biquadrada em  $u$  e suas raízes são

$$u^2 = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 + 16y^2}}{8} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Como  $u^2$  é um número real e  $x - \sqrt{x^2 + y^2}$  é um número negativo, vamos considerar apenas a raiz positiva, então

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Usando esse valor de  $u$  em  $v = \frac{y}{2u}$ , temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{y}{2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}} \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{(x^2 + y^2) - x^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{|y|} = \frac{\text{sign}al y}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}. \end{aligned}$$

Desta forma, para cada par  $(x, y)$  do complexo  $z = x + yi$  está associado os valores  $w = (u, v)$  e  $-w = (-u, -v)$ . Isso é um contraste com o caso real, pois a imagem de um número complexo  $z_0$  são dois pontos no  $w$ -plano. Este tipo de função, chamada de multivalente, aparece em outras situações, como por exemplo  $w = \sqrt[n]{z}$ . Mas não ocorre em variável real.

A figura abaixo mostra como a função raiz quadrada complexa transforma as retas verticais e horizontais do  $z$ -plano em curvas do  $w$ -plano. A figura foi retirada da referência [1].



FIGURA 4: Função raiz quadrada complexa

### 3 Funções trigonométricas

#### 3.1 Função seno real

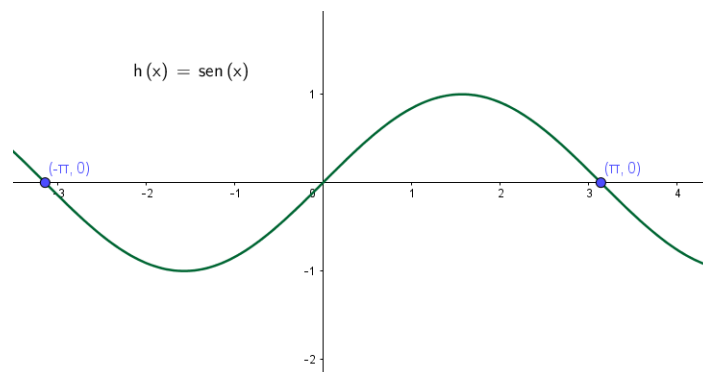


FIGURA 5: Função seno real

**Definição 1.10.** É chamada de função seno a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \text{sen } x$ . Essa função é periódica com período  $2\pi$  e a sua imagem é o intervalo  $[-1, 1]$ , portanto é uma função limitada.

### 3.2 Função seno complexa

Vimos que  $e^{yi}$  pode ser escrito como em (1.2). Seja  $x$  uma variável real, então

$$e^{xi} = \cos x + i \text{sen } x,$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \text{sen } x.$$

Somando ambas as expressões acima e fazendo algumas manipulações, conseguimos expressar a função cosseno real em termos da função exponencial complexa:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Semelhantemente, se subtrairmos ao invés de somar, obtemos a função seno real em termos da exponencial complexa:

$$\text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Agora se substituirmos a variável real  $x$  pela variável complexa  $z$ , temos as definições das funções seno e cosseno complexas.

**Definição 1.11.** As funções seno e cosseno complexas são definidas da seguinte forma

$$\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ainda, podemos substituir  $z = x + yi$  nas definições obtendo:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x + yi) &= \frac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \text{sen } x) - e^y(\cos x - i \text{sen } x)}{2i} \\ &= \text{sen } x \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \end{aligned}$$

Como as funções seno e cosseno hiperbólicos reais são definidas por  $\text{senh } y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$  e  $\text{cosh } y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$  respectivamente, segue que

$$\text{sen } z = \text{sen } x \text{cosh } y + i \cos x \text{senh } y. \quad (3.1)$$

Do mesmo modo podemos reescrever o cosseno complexo como

$$\cos z = \cos x \text{cosh } y - i \text{sen } x \text{senh } y.$$

*Identities*

Para quaisquer  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , as seguintes identidades são válidas:

- (1)  $\text{sen}(-z) = -\text{sen } z$ ;
- (2)  $\cos^2 z + \text{sen}^2 z = 1$ ;
- (3)  $\text{sen}(z_1 \pm z_2) = \text{sen } z_1 \cos z_2 \pm \text{sen } z_2 \cos z_1$ ;
- (4)  $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \text{sen } z_2 \text{sen } z_1$ .

**Prova:** Provaremos apenas a identidade (2)

$$\cos^2 z + \text{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} = 1$$

□

*Periodicity*

Como visto, a função  $f(z) = e^z$  é periódica com período  $2\pi i$ , ou seja,  $e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$ . Substituindo  $z$  por  $iz$  obtemos  $e^{iz+2\pi i} = e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}$ , com isso,  $e^{iz}$  é periódica com período  $2\pi$ . De modo similar,  $e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz}$  com período  $2\pi$ . Portanto, das definições de seno e cosseno, temos:

$$\text{sen}(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \text{sen } z,$$

e

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Em resumo, as funções seno e cosseno são periódicas com período  $2\pi$ .

*Transformação  $w = \text{sen } z$*

Como seno é periódica com período  $2\pi$ , vamos analisar como a região  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty$  é transformada pela  $w = \text{sen } z$ .

Fixando as retas verticais  $x = a$ , com  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ , por ora  $a \neq 0$  e  $-\infty < y < \infty$ , temos por (3.1)

$$u = \text{sen } a \cosh y, \quad v = \cos a \sinh y.$$

Isolando  $\cosh y$  e  $\sinh y$ , obtemos

$$\cosh y = \frac{u}{\text{sen } a}, \quad \sinh y = \frac{v}{\cos a}.$$

Usando a identidade  $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ , temos

$$\left(\frac{u}{\text{sen } a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = 1.$$

A equação acima é de uma hipérbole com vértices em  $(\pm \text{sen } a, 0)$  e assíntota em  $v = \pm \left(\frac{\cos a}{\text{sen } a}\right)u$ .

Portanto, a imagem da reta vertical  $x = a$ ,  $\frac{-\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$  e  $a \neq 0$  é o ramo da hipérbole que contém o ponto  $(\operatorname{sen} a, 0)$ .

Quando temos  $x = \frac{-\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  e  $x = 0$ , as imagens são respectivamente os conjuntos  $u \leq -1$ ,  $u \geq 1$  e  $u = 0$ .

Para retas horizontais,  $y = b$ ,  $\frac{-\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ , as imagens são dadas por

$$u = \operatorname{sen} x \cosh b, \quad v = \cos x \operatorname{senh} b.$$

Quando  $b \neq 0$ ,

$$\left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{senh} b}\right)^2 = 1.$$

O que nos dá a equação de uma elipse que cruza o eixo  $u$  em  $(\pm \cosh b, 0)$  e o eixo  $v$  em  $(0, \pm \operatorname{senh} b)$ .

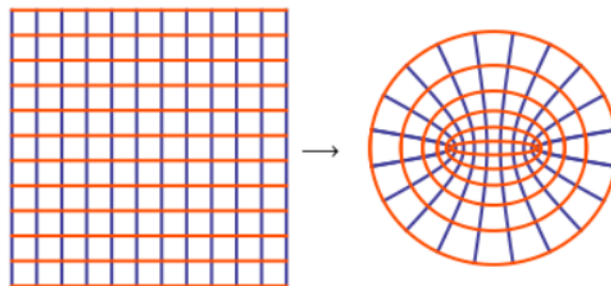


FIGURA 6: Função seno complexa

Outro ponto interessante é que a função seno real é limitada, mas a complexa não é.

De fato, tome  $z = yi$ , então

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \left| \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \right| \leq \frac{|e^{-y}|}{2} + \frac{|e^y|}{2}.$$

Fazendo  $y$  tender a infinito, temos

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{|e^{-y}|}{2} + \frac{|e^y|}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{|e^{-y}|}{2} \right) + \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{|e^y|}{2} \right) = 0 + \infty.$$

Ou seja, a função seno complexa é ilimitada.

## 4 Gráfico das funções complexas

A representação gráfica de uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , isto é, com domínio e imagem no campo dos complexos é impossível, já que tal gráfico reside na quarta dimensão, portanto seria preciso um sistema de coordenadas com quatro eixos perpendiculares entre si para a construção da curva, a qual seria uma “superfície-2D” representada num “hiperespaço-4D”.

Todavia, como fizemos, uma maneira de se estudar o comportamento de tais funções é analisando uma região do seu domínio e onde ela é levada. No nosso caso, tomamos a malha no  $z$ -plano (formada pela reunião de retas verticais e horizontais) e analisamos a imagem obtida através da transformação  $z = f(z)$ .

**Agradecimentos:** Primeiramente a Deus que me permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

À minha orientadora Marta Cilene Gadotti, pela orientação, apoio e confiança.

Agradeço à minha mãe Maria Sílvia de Lima, heroína que me deu incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

E ao meu pai Delcio Pazim, que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que para mim foi muito importante.

*Abstract: This work presents a study of the geometric behavior of the exponential, square root and sine functions when their domain is extended from the real numbers ( $\mathbb{R}$ ) to the complexes ( $\mathbb{C}$ ), in addition to some interesting contrasts if these functions are compared with real domain and complex domain.*

*Keywords: exponential complex; complex root; sine complex; transformation in the plane.*

---

## Referências Bibliográficas

- [1] PIANOSCHI, T.A. *Visualização das funções complexas e do teorema fundamental da álgebra*. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.
- [2] ZILL, D.G.; SHANAHAN, P.D. et al. *Complex analysis*. [S.I]: Jones & Bartlett Publishers, 2013.



# Alguns modelos de competição entre duas espécies

Luis Renato de Campos Damin<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

**Resumo:** inserir

**Palavras-chave:** ponto de equilíbrio; estabilidade; modelo matemático

## 1 Introdução

O estudo da interação entre espécies que vivem num mesmo habitat é de fundamental importância pois a dinâmica de cada espécie é afetada pelos diferentes tipos de interações que podem ocorrer. Neste trabalho analisamos alguns modelos para duas espécies que estão em competição (por espaço, alimento, etc), ou seja, cada espécie afeta a outra, de forma negativa, na luta pela sobrevivência ([7]). Os modelos analisados são do tipo:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \frac{dN_1}{dt} = N_1 f(N_1, N_2), \\ \dot{N}_2 = \frac{dN_2}{dt} = N_2 g(N_1, N_2), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $N_1 = N_1(t)$  e  $N_2 = N_2(t)$  são as populações das respectivas espécies em função do tempo e as funções  $f(N_1, N_2)$  e  $g(N_1, N_2)$  descrevem como uma população é afetada pela presença da outra.

Como os modelos não necessariamente possuem solução analítica, será realizado um estudo qualitativo das soluções, através da análise de pontos de equilíbrio e estabilidade.

## 2 Alguns modelos de competição

Apresentaremos alguns modelos utilizados na descrição da competição entre duas espécies, observando que, o que difere um modelo do outro é a forma como cada população cresce na ausência da outra, até chegarmos ao modelo clássico de Lotka-Volterra.

## 3 Modelo de competição simples

Um dos modelos mais simples de competição entre duas espécies é dado por:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 - b_1 N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 - b_2 N_1 N_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  são as taxas de crescimentos das espécies  $N_1$  e  $N_2$ , respectivamente. O fator  $N_1 N_2$  representa o encontro entre ambas as espécies e os parâmetros  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$  representam o quão prejudicial esse encontro é para cada espécie.

<sup>†</sup>IGCE-Rio Claro

Como o sistema possui quatro parâmetros  $(r_1, r_2, b_1, b_2)$ , através de mudanças de variáveis, podemos tornar o sistema (3.1) adimensional. Considerando:

$$x = \frac{b_1}{r_1} N_2, y = \frac{b_2}{r_2} N_1, \tau = r_1 \text{ e } \alpha = \frac{r_1}{r_2},$$

transformamos o sistema (3.1) na forma adimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y), \\ \dot{y} = \alpha y(1 - x), \end{cases} \quad (3.2)$$

que possui somente um parâmetro  $(\alpha)$ .

Os pontos de equilíbrio de (3.2) são aqueles tais que  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ , ou seja,

$$\begin{cases} 0 = x(1 - y), \\ 0 = \alpha y(1 - x), \end{cases} \quad (3.3)$$

Obtemos como pontos de equilíbrio de (3.2):  $P_1 = (x, y) = (0, 0)$  e  $P_2 = (x, y) = (1, 1)$ .

A matriz jacobiana do sistema (3.2) é dada por

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

onde  $f(x, y) = x(1 - y)$  e  $g(x, y) = \alpha y(1 - x)$  e, conseqüentemente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\alpha y \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha(1 - x).$$

Utilizando o teorema de linearização (veja apêndice) temos que a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados depende dos autovalores da matriz jacobiana aplicada em cada ponto de equilíbrio. Vejamos essa análise para os dois pontos de equilíbrio encontrados.

1.  $P_1 = (x, y) = (0, 0)$

Para o ponto de equilíbrio  $P_1$  temos

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ e seus autovalores são: } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \alpha.$$

Como  $\alpha > 0$ , temos  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$  e assim  $P_1$  é instável.

2.  $P_2 = (1, 1)$

Para o ponto fixo  $P_2 = (1, 1)$  temos:

$$A(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ e seus autovalores são: } \lambda_1 = \alpha \text{ e } \lambda_2 = -\alpha.$$

Como  $\alpha > 0$ , temos  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$  e portanto o ponto  $P_2$  é do tipo sela.

Neste modelo, devido à sua simplicidade, é possível determinar o comportamento dos pontos de equilíbrio em função de um único parâmetro.

#### 4 Modelo com uma das espécies com crescimento logístico

Uma outra variação de (1.2) é dado por:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - b_1 N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 - b_2 N_1 N_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

Este modelo e bem similar ao (3.1), porem agora, nota-se que a população  $N_1$  na ausência da competição, ja não cresce de forma exponencial, e sim na forma do modelo logístico. Pode-se dizer que este modelo é um caso mais realista do que o discutido antes. O termo  $K_1$  significa a população máxima que a especie  $N_1$  pode atingir, logo a dimensão de  $K$  é população.

De maneira análoga ao caso anterior, sera feito as mudanças nas variáveis envolvidas, para tornar mais simples a analise, seja:

$$x = \frac{N_1}{K_1}, y = \frac{b_1}{r_1} N_2, \tau = r_1 t, \alpha = \frac{r_2}{r_1}, \beta = \frac{b_2 K_1}{r_1}.$$

Assim chegando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y), \\ \dot{y} = y(\alpha - \beta x), \end{cases} \quad (4.2)$$

Novamente agora o caminho é encontrar os pontos fixos, tais que  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ .

$$\begin{cases} 0 = x(1 - x - y), \\ 0 = y(\alpha - \beta x), \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (x, y) = (1, 0) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

1.  $(x, y) = (0, 0)$  Para o ponto fixo  $(0, 0)$  temos:

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ logo seus autos valores são: } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \alpha$$

Como  $\alpha > 0$ , logo  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  portanto o ponto fixo é instável.

2.  $(x, y) = (1, 0)$

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}, \text{ logo seus autos valores são:}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha - \beta - 1 \pm \sqrt{(1 - \alpha + \beta)^2 - 4(\beta - \alpha)}}{2\alpha}$$

Agora fica difícil ter uma analise completa desse ponto fixo, pois só sabemos que  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , tornando complicado saber como se comportara o ponto fixo, aqui ja começa a necessidade de ao invés, de fazer a analise completa do sistema, dar valores para  $\alpha$  e  $\beta$  assim tornando o problema numérico e de fácil analise.

3.  $(x, y) = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$ ,  $A(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} & -\frac{\alpha}{\beta} \\ \alpha + \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix}$ , logo seus autos valores são:  $\lambda_1 = 0$  e

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta} - \alpha + \beta$$

Como ja visto, sem saber os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  fica complicado saber qual o sinal de  $\lambda_2$ . Assim reforçando a ideia que é mais conveniente fazer a analise numérico, dando valores para os parâmetros.

## 5 Modelo com ambas as espécies com crescimento logístico

Uma ultima variação do modelo (1) que veremos aqui é dado por:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - b_1 N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - b_2 N_1 N_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

Agora pode-se ver, que ambas as espécies possuem um crescimento de acordo com o modelo logístico e ambas competem entre si, assim tornando o modelo mais próximo da realidade, em comparação com os outros dois estudados anteriormente. Usaremos da mesma técnica que nos exemplos anteriores, tome:

$$x = \frac{N_1}{K_1}, y = \frac{N_2}{K_2}, \alpha = \frac{b_1 K_2}{r_1}, \beta = \frac{b_2 K_1}{r_2}, \gamma = \frac{r_2}{r_1}, \tau = r_1 t$$

Com essas mudanças, nosso sistema se resumira em:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - \alpha y), \\ \dot{y} = \gamma y(1 - y - \beta x), \end{cases}$$

Calculando os pontos fixos teremos que:

$$\begin{cases} 0 = x(1 - x - \alpha y), \\ 0 = \gamma y(1 - y - \beta x), \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (1, 0), (1, 0) \text{ ou } \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta}\right)$$

1.  $(x, y) = (0, 0)$

Para o ponto fixo  $(0, 0)$  temos:

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ logo seus autos valores são: } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \alpha$$

Como  $\alpha > 0$  logo  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  portanto o ponto fixo é instável.

2.  $(x, y) = (0, 1)$

Para o ponto fixo  $(0, 1)$  temos:

$$A_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -\alpha\beta & -\gamma \end{pmatrix} \text{ logo seus autos valores são: } \lambda_1 = (1 - \alpha) \text{ e } \lambda_2 = -\gamma .$$

3.  $(x, y) = (1, 0)$

Para o ponto fixo  $(1, 0)$  temos:

$$A_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & \gamma(1 - \beta) \end{pmatrix} \text{ logo seus autos valores são: } \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = \gamma(1 - \beta).$$

4.  $(x, y) = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta}\right)$

Para o ponto fixo  $\left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta}\right)$  temos:

$$A(0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - 1}{1 - \beta\alpha} & -\alpha \frac{1 - \alpha}{1 - \beta\alpha} \\ -\gamma\beta \frac{1 - \beta}{1 - \beta\alpha} & \gamma \frac{\beta - 1}{1 - \beta\alpha} \end{pmatrix} \text{ logo seus autovalores são:}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( a + b\gamma \pm \sqrt{(a + \gamma b)^2 - 4(ab\gamma(1 + \alpha\beta))} \right)$$

onde  $a = \frac{\alpha - 1}{1 - \beta\gamma}$  e  $b = \frac{\beta - 1}{1 - \beta\gamma}$

Para todos os casos, sem saber os valores dos parâmetros envolvidos, fica extremamente difícil fazer uma análise completa de como o sistema irá se comportar no geral. Para ter uma ideia de como as espécies se comportariam, será considerado um caso, mais específico em que atribuiremos valores para os parâmetros.

## 6 Exemplo

Seja o modelo:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} = y(2 - y - x), \end{cases}$$

onde agora  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $\gamma = 1$ .

Calculando os pontos fixos teremos que:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} = y(2 - y - x), \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (0, 2), (3, 0) \text{ ou } (1, 1)$$

1.  $(x, y) = (0, 0)$

Para o ponto fixo  $(0, 0)$  temos:

$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  logo seus autovalores são:  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 2$ . Como os autovalores são positivos, logo o ponto fixo é instável.

2.  $(x, y) = (0, 2)$

Para o ponto fixo  $(0, 2)$  temos:

$A_{(0,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  logo seus autovalores são:  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Como os autovalores são negativos, logo o ponto fixo é estável.

3.  $(x, y) = (3, 0)$

Para o ponto fixo  $(3, 0)$  temos:

$A_{(3,0)} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  logo seus autovalores são:  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Como os autovalores são negativos, logo o ponto fixo é estável.

4.  $(x, y) = (1, 1)$

Para o ponto fixo  $(1, 1)$  temos:

$A_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  logo seus autovalores são:  $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$  e  $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$ .

Como  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , logo o ponto fixo é do tipo sela.

Agora sabendo as estabilidades de todos os pontos fixos, basta dar a condição inicial do modelo, que é possível saber se ambas as populações poderão viver juntas, ou se uma levará a extinção da outra.

## 1 Linearização de sistemas

A técnica de Linearização para sistemas não lineares é de fundamental importância e foi amplamente utilizada no estudo acima. A busca é tentar aproximar um retrato de fase perto de um ponto fixo para um retrato de fase de um sistema linear correspondente.

Então com isso em mente, seja o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

Supondo que  $(x^*, y^*)$  é ponto fixo desse sistema, isto é:

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} \dot{u} = x - x^*, \\ \dot{v} = y - y^*, \end{cases} \quad (1.2)$$

Note que  $u$  e  $v$  são pequenas perturbações próximos ao ponto fixo. Esta mudança nos leva a  $\dot{u} = \dot{x} \Rightarrow \dot{u} = f(u + x^*, v + y^*)$

Fazendo a expansão em Series de Taylor da  $f(u + x^*, v + y^*)$  teremos que:

$$\dot{u} = f(u + x^*, v + y^*) = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

O termo  $O(u^2, v^2, uv)$  sera negligenciado, pois  $u, v \approx 0$ . Fazendo de maneira análoga para  $\dot{v} = \dot{y}$  tem-se  $\dot{v} = +u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y}$ . Assim o novo sistema equivalente próximo ao ponto fixo sera:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

onde denotando  $A_{(x^*, y^*)}$  como Matriz Jacobiana do ponto fixo, onde:

$$A_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Assim agora pode-se analisar sistemas não lineares iguais aos sistemas lineares próximos aos pontos fixos.

Os únicos casos que esta análise não é segura, é quando os pontos fixos encontrados no sistemas linearizados são centros, nós degenerados, estrelas ou ponto fixos isolados, pois nestes casos, o termo que negligenciamos faz uma diferença considerável no nosso sistema.

## Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D.G. - *Equações diferenciais aplicadas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [2] Hale, J.; Koçak, H.; *Dynamics and Bifurcations* - Springer-Verlag, 2012.
- [3] Boyce, W.E; Diprima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 8ª edição. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [4] Hale, J. *Dynamics and Bifurcations*, New York Inc., Springer-Verlag, 1991.
- [5] Strogatz, S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos* - Perseus Books, 1994.
- [6] Keshet, L. E. *Mathematical Models in Biology*, Random House/New York, (1988).
- [7] Bassanezi, R.C.; Ferreira Jr., W.C. *Equações diferenciais com aplicações* São Paulo, Harbra, (1988).

## Agradecimentos: Opcional

*Abstract: inserir em inglês*

*Keywords: equilibrium point; stability; mathematical model*

---

# Uma Introdução ao Estudo da Equação do Movimento Planetário

Mateus Spadotto<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

**Resumo:** Nesse trabalho analisamos algumas equações utilizadas para descrever o movimento planetário, observando como pequenas mudanças nas equações provocam mudanças nos pontos de equilíbrio e possíveis órbitas preexistentes.

**Palavras-chave:** ponto de equilíbrio; estabilidade; sistemas reversíveis

## 1 Introdução

Sistemas de equações diferenciais não lineares estão presentes em várias áreas do conhecimento, em estudos sobre osciladores mecânicos, circuitos elétricos, semicondutores, reações químicas e biológicas, crescimento populacional, dentre outros.

Na Astronomia a dinâmica dos corpos celestes dependem da interação de outros corpos celestes, como planetas, estrelas, asteroides, buracos negros e afins, às vezes contribuindo de maneira significativa para a dinâmica de uma forma geral.

Dessa forma, nesse trabalho procuramos analisar como mudanças na equação do movimento planetário provocam mudanças nos pontos de equilíbrios e possíveis órbitas preexistentes.

## 2 Conceitos Preliminares

Apresentamos a seguir alguns conceitos e resultados que serão utilizados no texto, que podem ser encontrados em ([2], [3]).

**Definição A.1.** Considere o sistema de segunda ordem na forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. Se  $f(x, y)$  é ímpar em  $y$  e  $g(x, y)$  é par em  $y$  dizemos que o sistema é reversível. [2]

**Teorema A.2** (Centros não lineares para sistemas reversíveis). *Suponha que a origem  $x^* = 0$  seja um centro linear para o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

<sup>†</sup>IGCE-Rio Claro



e suponha que o sistema é reversível. Então suficientemente próximo da origem, todas as trajetórias serão curvas fechadas [2].

### 3 O problema

Depois da introdução do estudo de J. Kepler, que ficou conhecido como as **Leis de Kepler**, houveram vários estudos complementares que estavam em acordo com suas proposições. Um desses estudos foram os cálculos newtonianos que comprovaram as Leis de Kepler de maneira analítica (para o problema de dois corpos). Conforme a ciência foi avançando novos argumentos e teorias melhoraram os estudos já realizados. Um caso desses foi a chamada Teoria da Relatividade apresentada por A. Einstein, no qual introduziu fatores relativísticos à teoria no qual foram calculados por Lorentz anteriormente. Com isso novos instrumentos tais como telescópios ópticos, telescópios de Raios-X, LASER's etc, foram necessários para a coleta de dados a fim de comprovar as teorias. Utilizando a primeira Lei de Kepler e a Teoria da Gravitação Universal é possível obter a equação (3.1).

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha, \tag{3.1}$$

onde  $\alpha > 0$  é um parâmetro e  $u = \frac{1}{r}$ ,  $r$  é a distância do planeta a um dos focos da elipse. A equação (3.1) leva em conta apenas a mecânica newtoniana, e assim, despreza os efeitos relativísticos e suas possíveis perturbações no sistema dinâmico. Os cálculos para a solução da equação diferencial (3.1) podem ser encontradas no apêndice e a solução é dada por

$$u(\theta) = \alpha + a_2 \cos(\theta + \phi). \tag{3.2}$$

Como  $u = \frac{1}{r}$ , a equação (3.2) torna-se:

$$r(\theta) = \frac{\beta}{1 + \varepsilon \cos(\theta + \phi)}, \tag{3.3}$$

onde  $\phi$  é uma constante real. O termo  $\varepsilon$  é conhecido por excentricidade da órbita do planeta. Se  $\varepsilon < 1$  a órbita é uma elipse; se  $\varepsilon = 0$  a órbita é uma circunferência; se  $\varepsilon > 1$  a órbita é uma hipérbole, como demonstrado por [1].

A solução de (3.1) foi obtida de maneira analítica e mostra que o planeta possui uma órbita bem definida.

Uma primeira variação para a equação (3.1) é dada por:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha + \xi u. \tag{3.4}$$

A equação (3.4) foi analisada e discutida por [4] e tem como solução

$$u(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon' \cos(\rho\theta)}, \tag{3.5}$$

no qual  $\varepsilon' \simeq \xi$  e  $\rho^2 = \xi$ .

O fator  $\rho$  traz uma precessão do periélio e devido a essa perturbação o planeta tem em seu periélio um avanço angular como na Figura 1.

Uma segunda variação da equação (3.1) será analisada logo a seguir.

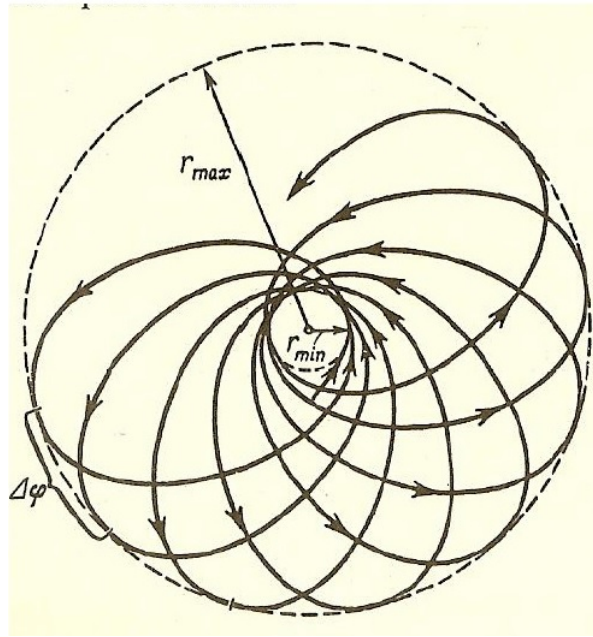


FIGURA 1: Precessão do periélio devido à perturbação.

#### 4 O problema proposto

A equação relativística para a órbita de um planeta em torno do sol é dada por

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha + \xi u^2, \tag{4.1}$$

onde  $u = \frac{1}{r}$ , e  $r, \theta$  são coordenadas polares do planeta em seu plano de movimento. O parâmetro  $\alpha$  é positivo e vem da Mecânica Clássica, o termo  $\varepsilon u^2$  é a correção de Einstein, onde  $\varepsilon$  é um parâmetro ‘pequeno’ positivo. Escrevendo a equação (4.1) na forma de sistema temos

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = v = f(u, v), \\ \frac{dv}{d\theta} = \alpha + u(\xi u - 1) = g(u, v), \end{cases} \tag{4.2}$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (4.2) são aqueles tais que  $\frac{du}{d\theta} = 0$  e  $\frac{dv}{d\theta} = 0$ . De (4.2) os pontos de equilíbrio são obtidos das equações  $v = 0$  e  $\alpha + u(\xi u - 1) = 0$ . Como a segunda equação é um polinômio do segundo grau, obtemos como raízes:

$$u' = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\xi\alpha}}{2\xi} \tag{4.3}$$

$$u'' = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\xi\alpha}}{2\xi} \tag{4.4}$$

Considerando apenas os casos em que:  $1 - 4\xi\alpha \geq 0$ , temos como pontos de equilíbrio:

$$u_1^* = (u', 0) \tag{4.5}$$

$$u_2^* = (u'', 0) \tag{4.6}$$

A **Matriz Jacobiana** para o sistema é:

$$A_{(u^*, v^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\xi u^* & 0 \end{pmatrix}$$

Analisando primeiramente para o ponto de equilíbrio dado em (4.5);

$$A_{(u_1^*, v^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\xi u' & 0 \end{pmatrix}$$

O determinante de  $A_{(u_1^*, v^*)}$  é:

$$\begin{aligned} \det(A_{(u_1^*, v^*)}) &= 1 - 2\xi u' \\ &= 1 - 2\xi \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4\xi\alpha}}{2\xi} \right) \\ &= -\sqrt{1 - 4\xi\alpha} < 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Assim, o ponto  $u_1^* = (u', 0)$  é sela (os autovalores são reais e tem sinais opostos). Analisando o ponto  $u_2^* = (u'', 0)$  temos

$$A_{(u_2^*, v^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\xi u'' & 0 \end{pmatrix}$$

O determinante de  $A_{(u_2^*, v^*)}$  é:

$$\begin{aligned} \det(A_{(u_2^*, v^*)}) &= 1 - 2\xi u'' \\ &= 1 - 2\xi \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\xi\alpha}}{2\xi} \right) \\ &= \sqrt{1 - 4\xi\alpha} > 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como o traço da matriz  $A_{(u_2^*, v^*)}$  é igual a zero, e o valor do determinante encontrado em (4.8) é maior que zero, o ponto de equilíbrio  $u_2^*$  é um centro para o sistema linearizado e assim, não podemos concluir sua estabilidade para o sistema (4.2).

Mostraremos que o ponto de equilíbrio  $u_2^* = (u'', 0)$  corresponde a uma órbita circular planetária.

No sistema (4.2) temos  $f(u, v) = v$  que é ímpar na variável  $v$ , ou seja, fazendo a mudança de variável  $v \rightarrow -v$  temos

$$f(u, -v) = -v \Rightarrow f(u, -v) = -f(u, v) \tag{4.9}$$

De modo análogo mostramos que a função  $g(u, v) = \alpha + u(u\xi - 1)$  é par, ou seja, fazendo a mudança de variável  $v \rightarrow -v$  temos

$$g(u, -v) = \alpha + u(u\xi - 1) \Rightarrow g(u, -v) = g(u, v) \tag{4.10}$$

Desta maneira o sistema (4.2) é reversível. De acordo com o teorema sobre sistemas reversíveis, concluímos que todas as órbitas suficientemente próximas do ponto de equilíbrio  $u_2^*$  são curvas fechadas.

FIGURA 2: Órbita do planeta, e vetores posição

## 5 Apêndice

### 5.1 Dedução da equação (1.2)

Considerando a **Figura 1.2** e que a posição de uma partícula *Planeta* sob ação de uma força central pode ser escrita como na equação (1.22):

$$\vec{r}(\theta(t)) = r(t)\hat{r}(\theta(t)) \quad (5.1)$$

Assim a posição da partícula em coordenadas polares será:

$$\begin{cases} x = r(t) \cos(\theta(t)) \\ y = r(t) \sin(\theta(t)) \end{cases} \quad (5.2)$$

$$(5.3)$$

Os vetores unitários na direção radial e angular serão:

$$\frac{\vec{r}(\theta(t))}{\|\vec{r}(\theta(t))\|} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} = \hat{r} \quad (5.4)$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} = \hat{\theta} \quad (5.5)$$

A taxa de variação do versor no tempo na equação (1.25) é:

$$\frac{\dot{\vec{r}}(\theta(t))}{\|\vec{r}(\theta(t))\|} = \sin(\theta)\dot{\theta}\hat{i} + \cos(\theta)\dot{\theta}\hat{j} = \dot{\theta}(-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}) = \dot{\theta}\hat{\theta} \quad (5.6)$$

e a segunda derivada no tempo é:

$$\frac{\ddot{\vec{r}}(\theta(t))}{\|\vec{r}(\theta(t))\|} = -\cos(\theta)\dot{\theta}\hat{i} - \sin(\theta)\dot{\theta}\hat{j} = \dot{\theta}(-\cos(\theta)\hat{i} - \sin(\theta)\hat{j}) = -\dot{\theta}\hat{r} \quad (5.7)$$

a derivada do versor unitário angular em relação à  $\theta$  trás o seguinte resultado:

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos(\theta)\hat{i} - \sin(\theta)\hat{j} = -\hat{r} \quad (5.8)$$

Com isso pode-se calcular os vetores velocidade e aceleração, como segue:

$$\vec{v}(\theta(t)) = \frac{d\vec{r}(\theta(t))}{dt} = \dot{r}(\theta(t)) = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (5.9)$$

$$\vec{a}(\theta(t)) = \frac{d^2\vec{r}(\theta(t))}{dt^2} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \quad (5.10)$$

Derivando as equações (1.23) e (1.24) em relação ao tempo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}(t) \cos(\theta(t)) - r \sin(\theta(t))\dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}(t) \sin(\theta(t)) + r \cos(\theta(t))\dot{\theta} \end{cases} \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

Derivando (1.33) e (1.34) em relação ao tempo:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{r}(t) \cos(\theta(t)) - 2\dot{r} \operatorname{sen}(\theta(t))\dot{\theta} - r \cos(\theta(t))\dot{\theta}^2 - r \operatorname{sen}(\theta(t))\ddot{\theta} & (5.13) \\ \ddot{y} = \dot{r}(t) \operatorname{sen}(\theta(t)) + 2\dot{r} \cos(\theta(t))\dot{\theta} - r \operatorname{sen}(\theta(t))\dot{\theta}^2 + r \cos(\theta(t))\ddot{\theta} & (5.14) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1.34) por  $\cos(\theta(t))$ , e a equação (1.35) por  $\operatorname{sen}(\theta(t))$ , e somando as duas segue o seguinte resultado:

$$\ddot{x} \cos(\theta(t)) + \ddot{y} \operatorname{sen}(\theta(t)) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (5.15)$$

Comparando as equações (1.31) e (1.36), nota-se que a equação (1.36) corresponde a contribuição da aceleração radial do sistema.

Realizando agora a seguinte operação: Multiplicando a equação (1.34) por  $\operatorname{sen}(\theta(t))$ , e a equação (1.35) por  $\cos(\theta(t))$ , e somando as duas segue o seguinte resultado:

$$\ddot{x} \operatorname{sen}(\theta(t)) - \ddot{y} \cos(\theta(t)) = -2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} \quad (5.16)$$

A equação (1.37) corresponde ao negativo da contribuição angular da equação (1.31).

Da segunda Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (5.17)$$

Aplicando a equação (1.38) ao sistema de dois corpos Sol-Planeta tem-se:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F \cos(\theta) & (5.18) \\ m\ddot{y} = F \operatorname{sen}(\theta) & (5.19) \end{cases}$$

Onde  $F$  é a força de atração gravitacional que é dada por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{M_1 m_2}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \quad (5.20)$$

Onde  $G$  é a constante de gravitação universal;  $\vec{r}$  é o vetor posição formado pelos dois corpos;  $M_1$  e  $m_2$  são as massas dos planetas.

As equações (1.39) e (1.40) podem ser escritas como:

$$\begin{cases} m\ddot{x} \cos(\theta) = F \cos^2(\theta) & (5.21) \\ m\ddot{y} \operatorname{sen}(\theta) = F \operatorname{sen}^2(\theta) & (5.22) \end{cases}$$

somando (1.42) e (1.43) e dividindo por  $m$ , obtém-se:

$$\ddot{x} \cos(\theta) + \ddot{y} \operatorname{sen}(\theta) = \frac{F}{m} \quad (5.23)$$

Igualando (1.36) com (1.44) têm-se:

$$\frac{F}{m} = \ddot{r} + r\dot{\theta}^2 \quad (5.24)$$

A equação (1.45) é a equação para  $r(t)$ .

Reescrevendo as equações (1.39) e (1.40) na seguinte forma:

$$\begin{cases} m\ddot{x} \operatorname{sen}(\theta) = F \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) & (5.25) \\ m\ddot{y} \cos(\theta) = F \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) & (5.26) \end{cases}$$

Subtraindo (1.46) de (1.47) obtém-se:

$$m(\ddot{x} \sin(\theta) - \ddot{y} \cos(\theta)) = 0 \tag{5.27}$$

Igualando (1.37) com (1.48) têm-se:

$$-2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} = 0 \tag{5.28}$$

A equação (1.49) é a equação para  $\theta(t)$ .

Multiplicando (1.49) por  $r(t)$ , obtém-se:

$$-2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow (-2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta}) = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{5.29}$$

como o termo  $r^2\dot{\theta}$  é constante, pode-se multiplicar pela massa  $m$  que também é uma constante, assim obtém-se uma outra constante:

$$m(r^2\dot{\theta}) = \vec{L} \tag{5.30}$$

onde  $\vec{L}$  é denominado momento angular do sistema. [1]

Isolando  $\dot{\theta}$  em (1.51) e integrando em relação à  $dt$ , obtém-se:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2(t)} dt \tag{5.31}$$

Por meio da conservação do momento angular implica que  $\theta(t)$  seja estritamente monótona, assim pode-se obter a função  $t(\theta)$ . Desta maneira pode-se calcular  $r(t(\theta))$ . [5]

Tendo que  $\dot{\theta} = \frac{k}{r^2} = \text{constante}$  e calculando as seguintes derivadas por meio da regra da cadeia: [1]

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}r^2} = -\frac{\dot{r}}{k} \tag{5.32}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}k} \tag{5.33}$$

Isolando o termo  $\ddot{r}$  na equação (1.54), têm-se:

$$\ddot{r} = -k\dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \tag{5.34}$$

Levando (1.55) em (1.45), segue que:

$$-k\dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) - r\dot{\theta}^2 = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F}{k^2 m} \tag{5.35}$$

No caso gravitacional  $F$  é dado por:  $F(r) = -\frac{\beta}{r^2}$ , onde  $\beta > 0$ ; substituindo em (1.56) e chamando  $u = \frac{1}{r}$  têm-se:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\beta}{k^2 m} \tag{5.36}$$

A equação (1.57) é chamada *fórmula de Binet*. [1]

## 5.2 Solução da equação (1.2)

A solução da equação (1.2) será encontrada pela combinação linear da solução da equação homogênea associada com a solução da equação particular. Iniciando pela equação homogênea, como segue:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \tag{5.37}$$

A equação (1.58) é conhecida por *equação do oscilador harmônico(OHS)*, e possui autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . As soluções do OHS são dadas por:

$$u_1(\theta) = a_1 e^{i\theta} \tag{5.38}$$

$$u_2(\theta) = b_1 e^{-i\theta} \tag{5.39}$$

os termos:  $a_1, b_1$  são constantes reais.

Agora resolvendo a equação (1.2).

Uma possível solução para a equação (1.2) é a solução constante:

$$u(\theta) = A \tag{5.40}$$

Substituindo (1.61) na equação diferencial (1.2), conclui-se que  $A = \alpha$ . Fazendo a combinação linear de (1.59), (1.60), (1.61), e utilizado a relação de Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)$  obtém-se a solução geral:

$$u(\theta) = \alpha + a_2 \cos(\theta) + b_3 \text{sen}(\theta) \tag{5.41}$$

Fazendo  $b_3 = 0$ , obtém sem perda de generalidade:

$$u(\theta) = \alpha + a_2 \cos(\theta + \phi) \tag{5.42}$$

onde  $\phi$  é uma constante nominada fase inicial; Como  $u = \frac{1}{r}$ , então:

$$r(\theta) = \frac{\beta}{1 + \varepsilon \cos(\theta + \phi)} \tag{5.43}$$

onde  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ , e  $\varepsilon = \frac{a_2}{\alpha}$ .

**Agradecimentos:** Opcional

*Abstract:* inserir em inglês

*Keywords:* equilibrium point; stability;

## Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D.G. - *Equações diferenciais aplicadas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [2] Strogatz, S.H. - *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Pub, 1994.
- [3] Hale, J.; Koçak, H.; *Dynamics and Bifurcations* - Springer-Verlag, 2012.
- [4] Cattani, M. - <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1007/1007.0140.pdf>.
- [5] Gomes, R.P. - *As Leis de Kepler e as equações diferenciais ordinárias*.

# Grupo Fundamental

Matheus Eduardo Dametto Silva<sup>†</sup>  
Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

**Resumo:** Neste trabalho definiremos o grupo fundamental. Para isto necessitaremos do conceito de aplicações homotópicas, classes de homotopia, tipo de homotopia, homotopia de caminhos e homotopias relativas. Também apresentaremos alguns exemplos e resultados.

**Palavras-chave:** Aplicações Homotópicas; Classes de Homotopia; Tipo de Homotopia; Grupo Fundamental.

## 1 Aplicações Homotópicas

Neste trabalho o símbolo  $I$  indica o intervalo  $[0, 1]$ .

**Definição A.1.** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  se dizem homotópicas quando existe uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . A aplicação  $H$  é denominada uma homotopia entre  $f$  e  $g$ .

**Notação:**  $f \simeq g$ .

Dada a homotopia  $H : f \simeq g$ , consideremos, para cada  $t \in I$  a aplicação contínua  $H_t : X \rightarrow Y$ , definida por  $H_t(x) = H(x, t)$ . Dar a homotopia  $H$  equivale a definir uma “família contínua a um parâmetro”  $(H_t)_{t \in I}$  de aplicações de  $X$  em  $Y$ . Temos  $H_0 = f$  e  $H_1 = g$ , de modo que a família  $(H_t)_{t \in I}$  começa em  $f$  e termina em  $g$ .

**Lema A.2 (Lema da Colagem).** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A$  e  $B$  subconjuntos fechados de  $X$ , tais que  $A \cup B = X$ . Sejam  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  funções contínuas de modo que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ . Então a função  $h : X \rightarrow Y$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

**Proposição A.3.** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. A relação de homotopia,  $f \simeq g$  é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ .

**Prova:** Para todas  $f, g, h : X \rightarrow Y$  contínua, temos:

(i) Reflexiva:  $f \simeq f$ .

De fato, defina  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = f(x)$ . Assim,

$$H(x, 0) = f(x) = H(x, 1)$$

Portanto,  $f \simeq f$ .

<sup>†</sup>FAPESP - Processo 2017/07047-3



(ii) Simétrica:  $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ .

Seja  $H : X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Definindo  $K : X \times I \rightarrow Y$  por  $K(x, t) = H(x, 1 - t)$ , obtemos uma homotopia entre  $g$  e  $f$ , uma vez que

$$K(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$$

$$K(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$$

Portanto,  $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ .

(iii) Transitiva:  $f \simeq g$  e  $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$ .

Sejam  $H, K : X \times I \rightarrow Y$  tais que  $H : f \simeq g$  e  $K : g \simeq h$  aplicações contínuas. Defina  $L : X \times I \rightarrow Y$  como

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note que

$$L(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$$

$$L(x, 1) = K(x, 1) = h(x)$$

$$L\left(x, \frac{1}{2}\right) = H(x, 1) = g(x) = K(x, 0)$$

Como em  $t = \frac{1}{2}$  temos  $H(x, 1) = g(x) = K(x, 0)$  e  $H$  e  $K$  são contínuas, pelo Lema da Colagem, temos que  $L$  também é contínua.

Logo,  $L : f \simeq h$ . Portanto, a relação  $\simeq$  é de equivalência.  $\square$

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas de classes de homotopia. Denotaremos por  $[f]$  a classe de homotopia de uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ . O conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  é representado pelo símbolo  $[X, Y]$ .

**Proposição A.4.** *Sejam  $f, f' : X \rightarrow Y$  e  $g, g' : Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas. Se  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$ , então  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ . Em outras palavras, a composição de aplicações preserva homotopias.*

**Prova:** Sejam  $F : X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f \simeq f'$  e  $G : Y \times I \rightarrow Z$  uma homotopia entre  $g \simeq g'$ . Seja

$$\pi_2 : X \times I \rightarrow I$$

$$(x, t) \mapsto \pi_2(x, t) = t$$

a projeção no segundo fator.

Defina  $H : X \times I \rightarrow Z$  por  $H(x, t) = G \circ (F, \pi_2)(x, t)$ , isto é,  $H(x, t) = G(F(x, t), \pi_2(x, t)) \Rightarrow H(x, t) = G(F(x, t), t)$ .

Assim,

$$H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f(x), 0) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$$H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f'(x), 1) = g'(f'(x)) = g' \circ f'(x)$$

Portanto,  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ .  $\square$

**Observação A.5.** Como consequência da Proposição A.4, podemos definir composição entre classes de homotopia. Dadas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas, definimos  $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ . A classe  $[g \circ f]$  não depende dos representantes  $g, f$  das classes  $[g]$  e  $[f]$ , respectivamente.

## 1.1 Exemplos de Aplicações Homotópicas

**Exemplo A.6.** Duas aplicações constantes  $f, g : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = p, g(x) = q$ , são homotópicas se, e somente se,  $p$  e  $q$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos do espaço  $Y$ .

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $H : X \times I \rightarrow Y$  a homotopia entre  $f$  e  $g$ , isto é,  $H(x, 0) = f(x) = p$  e  $H(x, 1) = g(x) = q$ . Defina  $a : I \rightarrow Y$  por  $a(t) = H(x, t)$ . Então  $a$  é contínua,  $a(0) = p$  e  $a(1) = q$ . Portanto,  $p$  e  $q$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $Y$ .

( $\Leftarrow$ ) Por hipótese, existe um caminho  $a : I \rightarrow Y$  tal que  $a(0) = p$  e  $a(1) = q$ . Defina  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = a(t)$ , para todo  $(x, t) \in X \times I$ . Temos que  $H$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , pois  $H(x, 0) = a(0) = p = f(x)$  e  $H(x, 1) = a(1) = q = g(x)$ .  $\square$

**Exemplo A.7.** Seja  $Y \subset \mathbb{R}^n$ . Dadas as aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$ , suponha que, para todo  $x \in X$  o segmento de reta  $[f(x), g(x)]$  esteja contido em  $Y$ . Então  $f \simeq g$ .

**Prova:** De fato, defina  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$ . Assim,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ .  $H$  é chamada de homotopia linear. Para cada  $x \in X$  fixo e  $t$  variando em  $I$ , o ponto  $H(x, t)$  percorre o segmento de reta que liga o ponto  $f(x)$  e  $g(x)$ .  $\square$

Casos particulares:

1º) Duas aplicações contínuas quaisquer  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  são homotópicas. Em particular, toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é homotópica a aplicação constante 0, pela homotopia linear  $H(x, t) = (1 - t)f(x)$ .

2º) (Poincaré-Bohl) Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  são tais que  $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ , para todo  $x \in X$ , então  $f \simeq g$ . Com efeito, se 0 pertencesse ao segmento  $[f(x), g(x)]$ , para algum  $x \in X$ , teríamos

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - 0 + 0 - g(x)| \leq |f(x) - 0| + |0 - g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \geq |f(x)|.$$

**Exemplo A.8.** Seja  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a esfera unitária  $n$ -dimensional. Dadas duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow S^n$ , se  $f(x) \neq -g(x)$ , isto é, se  $f(x)$  e  $g(x)$  nunca são pontos antípodas, para todo  $x \in X$ , então  $f \simeq g$ .

**Prova:** Nestas condições é válido  $(1 - t)f(x) + tg(x) \neq 0$ , para todo  $(x, t) \in X \times I$ . De fato, suponha que exista algum  $t_0 \in I$  tal que  $(1 - t_0)f(x) + t_0g(x) = 0$ . Então  $(1 - t_0)f(x) = -t_0g(x)$ . Logo,

$$\|(1 - t_0)f(x)\| = \|-t_0g(x)\| \Rightarrow |(1 - t_0)| \cdot \|f(x)\| = |-t_0| \cdot \|g(x)\| \quad (1.1)$$

Como  $f, g$  estão definidas na esfera unitária, então  $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$ . De (1.1), temos

$$1 - t_0 = t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2}$$

Assim, para  $t = \frac{1}{2}$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -g(x)$$

o que é um absurdo, pois  $f(x) \neq -g(x)$ . Portanto,  $(1 - t)f(x) + tg(x) \neq 0$  é válido.

Defina  $H : X \times I \rightarrow S^n$  por  $H(x, t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$ . Então  $H(x, 0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x)$  e  $H(x, 1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x)$ .  $\square$

Casos particulares:

A) Se  $f : S^n \rightarrow S^n$  não possui pontos fixos, isto é,  $f(x) \neq x$ , para todo  $x \in S^n$ , então  $f$  é homotópica à aplicação antípoda  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ ,  $\alpha(x) = -x$ .

B) Se  $f : S^n \rightarrow S^n$  é tal que  $f(x) \neq -x$ , para todo  $x \in S^n$ , então  $f$  é homotópica à aplicação identidade de  $S^n$ .

**Exemplo A.9.** Se  $n$  é ímpar, então a aplicação antípoda  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ ,  $\alpha(x) = -x$ , é homotópica à identidade  $id : S^n \rightarrow S^n$ .

**Prova:** Seja  $n = 2k - 1$ , então  $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$ . Olhemos  $S^{2k-1}$  como o conjunto das  $k$ -uplas  $z = (z_1, \dots, z_k)$  de números complexos tais que  $\|(z_1, \dots, z_k)\| = 1$ , isto é,  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Seja  $u \in S^{2k-1}$  tal que  $\|u\| = 1$  e  $z \in S^{2k-1}$ , definiremos  $u \cdot z = (u \cdot z_1, \dots, u \cdot z_k)$ .

Tomemos  $H : S^{2k-1} \times I \rightarrow S^{2k-1}$  como  $H(z, t) = e^{t\pi i} \cdot z$ , onde  $e^{t\pi i} = \cos(t\pi) - i \sin(t\pi)$ . Temos então,

$$H(z, 0) = e^{0\pi i} \cdot z = (\cos(0) - i \sin(0)) \cdot z = z = id(z)$$

$$H(z, 1) = e^{1\pi i} \cdot z = (\cos(\pi) - i \sin(\pi)) \cdot z = -z = \alpha(z)$$

onde  $id(z)$  é a aplicação identidade de  $S^{2k-1}$  e  $\alpha(z)$  é a aplicação antípoda.  $\square$

**Exemplo A.10 (Relação entre homotopia e campos de vetores na esfera).** Um campo contínuo de vetores tangentes em  $S^n$  é uma aplicação contínua  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\langle x, v(x) \rangle = 0$ , para todo  $x \in S^n$ . Mostraremos que se existir um campo contínuo de vetores não nulos em  $S^n$ , então a aplicação antípoda  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$  é homotópica à  $id : S^n \rightarrow S^n$ .

**Prova:** Dado  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  contínuo, tangente e não-nulo em todos os pontos, temos que  $x + v(x) \neq 0$ , uma vez que se  $x + v(x) = 0$ , teríamos  $v(x) = -x$ , logo

$$\langle x, v(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, -x \rangle = 0 \Rightarrow -\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow -\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = (0, \dots, 0)$$

o que é um absurdo, pois  $x \in S^n$ .

Além disso, temos  $x + v(x) \neq x$ , pois se  $x + v(x) = x$ , concluímos  $v(x) = 0$ , o que é um absurdo, pois  $v(x)$  é não nulo.

Assim, defina  $f : S^n \rightarrow S^n$  por  $f(x) = \frac{x+v(x)}{\|x+v(x)\|}$ . Em decorrência do que foi visto anteriormente, temos que  $f$  é contínua e  $f(x) \neq x$ , para todo  $x \in S^n$ . Pelo Exemplo A.8 A), temos  $f \simeq \alpha$ , onde  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$  é dada por  $\alpha(x) = -x$ .

Agora, se definirmos  $H : S^n \times I \rightarrow S^n$  por  $H(x, t) = \frac{x+t \cdot v(x)}{\|x+t \cdot v(x)\|}$ , para todo  $x \in S^n$ , obtemos uma homotopia entre  $id : S^n \rightarrow S^n$  e a função  $f$ . Com efeito,  $H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = x = id(x)$  e

$$H(x, 1) = \frac{x+v(x)}{\|x+v(x)\|} = f(x)$$

Como visto na Proposição A.3, a relação  $\simeq$  é de equivalência, assim, por transitividade,  $id \simeq \alpha$  e, por simetria,  $\alpha \simeq id$ .  $\square$

## 2 Tipo de Homotopia

**Definição A.11.** Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  chama-se uma equivalência homotópica quando existe  $g : Y \rightarrow X$  contínua tal que  $g \circ f \simeq id_X$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ . Diz-se então que  $g$  é o inverso homotópico de  $f$  e que  $X$  e  $Y$  possuem o mesmo tipo de homotopia.

**Notação:**  $X \equiv Y$ .

**Observação A.12.** Todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica. De fato, se  $f$  é um homeomorfismo de  $X$  em  $Y$  com inversa contínua  $g$ , então  $g \circ f = id_X$ . Como  $id_X \simeq id_X$ , então  $g \circ f \simeq id_X$ . Ainda,  $f \circ g = id_Y$  e  $id_Y \simeq id_Y$ , logo  $f \circ g \simeq id_Y$ . Portanto,  $f$  é uma equivalência homotópica.

**Exemplo A.13.** Se  $X \equiv Y$  e  $Z \equiv W$ , é válido que  $[X, Z]$  tem a mesma cardinalidade que  $[Y, W]$ , isto é, existe uma bijeção de  $[X, Z]$  sobre  $[Y, W]$ .

**Prova:** Sejam as aplicações contínuas  $f : X \rightarrow Y, f' : Z \rightarrow W$  e  $g : Y \rightarrow X, g' : W \rightarrow Z$  seus respectivos inversos homotópicos. Dada  $h : X \rightarrow Z$ , defina  $\phi : [X, Z] \rightarrow [Y, W]$  por  $\phi([h]) = [f' \circ h \circ g]$ . Note que  $\phi$  está bem definida, pois se  $[h], [h'] \in [X, Z]$ , temos

$$[h] = [h'] \iff h \simeq h'$$

Pela Proposição A.4, sabemos que a composição de aplicações preserva homotopias, logo

$$f' \circ h \simeq f' \circ h' \Rightarrow f' \circ h \circ g \simeq f' \circ h' \circ g \Rightarrow [f' \circ h \circ g] = [f' \circ h' \circ g] \Rightarrow \phi([h]) = \phi([h'])$$

Veja que  $\phi$  é de fato uma bijeção, pois

$$\phi([h]) = \phi([h']) \Rightarrow [f' \circ h \circ g] = [f' \circ h' \circ g] \Rightarrow f' \circ h \circ g \simeq f' \circ h' \circ g$$

Da Proposição A.4, temos que a composição de aplicações preserva homotopias, assim

$$g' \circ f' \circ h \circ g \simeq g' \circ f' \circ h' \circ g$$

mas  $g'$  e  $f'$  são inversos homotópicos, logo  $g' \circ f' \simeq id_Z$ . Então,

$$g' \circ f' \circ h \circ g \simeq g' \circ f' \circ h' \circ g \Rightarrow id_Z \circ h \circ g \simeq id_Z \circ h' \circ g \Rightarrow h \circ g \simeq h' \circ g \Rightarrow h \circ g \circ f \simeq h' \circ g \circ f$$

Novamente,  $g$  e  $f$  são inversos homotópicos, assim  $g \circ f \simeq id_X$ , logo

$$h \circ g \circ f \simeq h' \circ g \circ f \Rightarrow h \circ id_X \simeq h' \circ id_X \Rightarrow h \simeq h' \Rightarrow [h] = [h']$$

Portanto,  $\phi$  é injetora.

Ainda, dada  $[\psi] \in [Y, W]$ , tome  $[g' \circ \psi \circ f] \in [X, Z]$ . Então temos,  $\phi([g' \circ \psi \circ f]) = [f' \circ g' \circ \psi \circ f \circ g]$ . Ora,  $f' \circ g' \simeq id_W$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ , então

$$f' \circ g' \circ \psi \circ f \circ g \simeq id_W \circ \psi \circ id_Y = \psi \Rightarrow [f' \circ g' \circ \psi \circ f \circ g] = [\psi]$$

Portanto,  $\psi$  é sobrejetora.

Logo  $\psi$  é uma bijeção de  $[X, Z]$  sobre  $[Y, W]$ . □

**Proposição A.14.** A relação “ter o mesmo tipo de Homotopia” é uma relação de equivalência.

**Prova:** (i) Reflexiva ( $X \equiv X$ )

Note que a aplicação contínua  $id : X \rightarrow X$  dada por  $id(x) = x$  é seu inverso homotópico, pois  $id \circ id(x) = id(id(x)) = id(x) = x = id_X$ . Portanto,  $X \equiv X$ .

(ii) Simétrica ( $X \equiv Y \Rightarrow Y \equiv X$ )

Dada a aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , temos que existe  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq id_X$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ , pois  $X \equiv Y$ . Ora, se tomarmos  $g$ , temos que  $f$  é seu inverso homotópico e, conseqüentemente,  $f \circ g \simeq id_Y$  e  $g \circ f \simeq id_X$ . Portanto,  $X \equiv Y \Rightarrow Y \equiv X$ .

(iii) Transitiva ( $X \equiv Y$  e  $Y \equiv Z \Rightarrow X \equiv Z$ )

Existem  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X, h : Y \rightarrow Z$  e  $k : Z \rightarrow Y$  tais que  $g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Y, k \circ h \simeq id_Z$  e  $h \circ k \simeq id_Z$ . Agora

$$g \circ k \circ h \circ f \simeq g \circ id_Y \circ f = g \circ f = id_X$$

$$h \circ f \circ g \circ k \simeq h \circ id_Y \circ k = h \circ k = id_Z$$

Logo,  $X \equiv Z$ . □

**Exemplo A.15.** A esfera unitária  $S^n$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ .

**Prova:** De fato, considere as aplicações contínuas  $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  e  $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ , dadas por  $i(x) = x$  (inclusão) e  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  (projeção radial). Note que  $r \circ i \simeq id_{S^n}$ , pois

$$r \circ i(x) = r(i(x)) = r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

como  $x$  está definido na esfera unitária  $S^n$ , então temos  $\|x\| = 1$ . Assim,  $r \circ i(x) = x$ . Logo,  $r \circ i = id_{S^n} \simeq id_{S^n}$ .

Agora, considerando a aplicação contínua  $id : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  e a composição  $i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , podemos obter uma homotopia entre  $i \circ r$  e  $id$ . Para isto, defina  $H : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  por  $H(x, t) = t \cdot x + (1 - t) \cdot \frac{x}{\|x\|}$ . Assim,  $H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = r(x) = i \circ r(x)$  e  $H(x, 1) = x = id$ .  $\square$

Do mesmo modo, mostra-se que  $D^{n+1} - \{0\}$  tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera  $S^n$ , onde  $D^{n+1}$  é a bola fechada de centro na origem e raio 1 em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### 3 Espaços Contráteis

**Definição A.16.** Dizemos que um espaço topológico  $X$  é contrátil quando ele tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

**Proposição A.17.**  $X$  é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade  $id : X \rightarrow X$  é homotópica a uma aplicação constante  $c : X \rightarrow X$ .

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Por  $X$  ser contrátil, temos que existem  $f : X \rightarrow \{p\}$  e  $g : \{p\} \rightarrow X$  tais que  $g \circ f \simeq id_X$ . Mas, note que  $g \circ f$  é uma aplicação constante, pois  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(p)$ , para todo  $x \in X$ . Definindo  $c : X \rightarrow X$  por  $c = g \circ f$ , temos  $c \simeq id_X$ .

( $\Leftarrow$ ) Defina  $f : X \rightarrow \{p\}$ , por  $f(x) = p$  e  $g : \{p\} \rightarrow X$ , por  $g(p) = q$ . Tomando  $c : X \rightarrow X$  como  $c(x) = q, q \in X$ , temos  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(p) = q = c(x)$ . Assim,  $g \circ f \simeq c$ . Como  $c \simeq id_X$ , por transitividade temos  $g \circ f \simeq id_X$ .

Ainda,  $f \circ g(p) = f(g(p)) = f(q) = p$ . Assim,  $f \circ g = id_{\{p\}}$ , logo,  $f \circ g \simeq id_{\{p\}}$ .  $\square$

**Corolário A.18.** Um espaço contrátil  $X$  é conexo por caminhos

**Prova:** Dados dois pontos  $p, q \in X$ , temos que definir uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow X$  de modo que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . Como  $X$  é contrátil, de acordo com a Proposição A.17, temos  $id_X \simeq c, c : X \rightarrow X$  dada por  $c(x) = q$ . Sendo assim, existe uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow X$ , tal que  $H(x, 0) = id_X(x) = x$  e  $H(x, 1) = c(x) = q$ . Defina  $\alpha : I \rightarrow X$  por  $\alpha(t) = H(p, t)$ . Pela continuidade de  $H$ , temos que  $\alpha$  é contínua, além disso,  $\alpha(0) = H(p, 0) = id_X(p) = p$  e  $\alpha(1) = q$ .  $\square$

**Proposição A.19.** Se  $X$  ou  $Y$  é contrátil, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é homotópica a uma constante.

**Prova:** (i) Se  $X$  for contrátil, então de acordo com a Proposição A.17, temos  $id_X \simeq c_1$ , onde  $c_1 : X \rightarrow X$  é dada por  $c_1(x) = q$ . Como a composição de aplicações preserva homotopias, temos  $f \circ id_X \simeq f \circ c_1$ . Ainda, para todo  $x \in X$ , temos

$$f \circ id_X(x) = f(id_X(x)) = f(x)$$

$$f \circ c_1(x) = f(c_1(x)) = f(q)$$

Assim,  $f \circ c_1 : X \rightarrow Y$  é uma aplicação constante. Portanto,  $f$  é homotópica a uma aplicação constante.

(ii) Se  $Y$  for contrátil, então, novamente pela Proposição A.17, temos  $id_Y \simeq c_2$ , onde  $c_2 : Y \rightarrow Y$  é definida por  $c_2(y) = p$ . Como a composição de aplicações preserva homotopias, temos  $id_Y \circ f \simeq c_2 \circ f$ . Mas,

$$id_Y \circ f(x) = id_Y(f(x)) = f(x)$$

$$c_2 \circ f(x) = c_2(f(x)) = p$$

para todo  $x \in X$ . Note que a composição  $c_2 \circ f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação constante. Portanto,  $f$  é homotópica a uma aplicação constante.  $\square$

**Corolário A.20.** *Se  $X$  é contrátil e  $Y$  é conexo por caminhos, então duas aplicações contínuas quaisquer  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas. Caso  $Y$  seja contrátil, então qualquer que seja  $X$  duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas.*

**Prova:** (i) Mostremos que se  $X$  for contrátil e  $Y$  conexo por caminhos, então  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas são homotópicas.

De acordo com a Proposição A.19, temos  $f \simeq f \circ c_1$ , onde  $f \circ c_1 : X \rightarrow Y$  é dada por  $f \circ c_1(x) = p$  e  $g \simeq g \circ c_2$ , onde  $g \circ c_2 : X \rightarrow Y$  é dada por  $g \circ c_2(x) = q$ . Por  $Y$  ser conexo por caminhos, existe um caminho  $\alpha : I \rightarrow Y$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . Com isso, defina  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = \alpha(t)$ . Note que  $H : f \circ c_1 \simeq g \circ c_2$ . Logo, por transitividade, concluímos  $f \simeq g$ .

(ii) Mostremos que se  $Y$  for contrátil, então qualquer que seja o espaço  $X$  temos que  $f, g : X \rightarrow Y$  são sempre homotópicas.

Pela Proposição A.19,  $f \simeq c_1 \circ f$  e  $g \simeq c_2 \circ g$ , onde  $c_1 \circ f, c_2 \circ g : X \rightarrow Y$  são dadas por  $c_1 \circ f(x) = p$  e  $c_2 \circ g(x) = q$ . Como  $Y$  é contrátil, de acordo com a Proposição A.17,  $id_Y \simeq c, c : Y \rightarrow Y$  definida por  $c(y) = q_1$ .

Logo,  $id_Y \circ c_1 \circ f \simeq c \circ c_1 \circ f$ . Assim temos,

$$id_Y \circ c_1 \circ f(x) = id_Y \circ c_1(f(x)) = id_Y(c_1(f(x))) = c_1(f(x)) = c_1 \circ f(x)$$

$$c \circ c_1 \circ f(x) = c(c_1(f(x))) = c(p) = q_1 \simeq c_2 \circ g(x)$$

pois, pelo Corolário A.18,  $Y$  é conexo por caminhos. Por transitividade, concluí-se  $f \simeq g$ .  $\square$

**Definição A.21.** Um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  chama-se uma estrela se existe  $p \in X$  tal que o segmento de reta  $[p, x]$  está contido em  $X$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição A.22.** Um subconjunto  $X$  contido em  $\mathbb{R}^n$  se diz convexo quando para todo par de pontos  $x, y \in X$  o segmento de reta  $[x, y]$  pertence à  $X$ .

Um conjunto convexo pode ser considerado como uma estrela com vértice em qualquer um de seus pontos.

**Exemplo A.23.** Todo conjunto estrelado é contrátil.

**Prova:** Seja  $X$  um conjunto estrelado. Defina  $H : X \times I \rightarrow X$  por  $H(x, t) = (1 - t) \cdot x + t \cdot p$ , logo  $H$  uma homotopia entre a aplicação  $id_X$  e a aplicação constante  $c : X \rightarrow \{p\}$ .  $\square$

**Exemplo A.24.** Uma bola aberta  $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo. Nesta notação,  $a$  representa o centro da bola e  $r$  seu raio.

**Prova:** Com efeito, sejam  $x, y \in B(a, r)$  e  $t \in I$ , segue que

$$\|(1-t) \cdot x + t \cdot y - a\| = \|(1-t) \cdot (x-a) + t \cdot (y-a)\| \leq \|(1-t) \cdot (x-a)\| + \|t \cdot (y-a)\|$$

Como  $t \in I$ , segue que  $1-t \geq 0$ , logo  $|1-t| = 1-t$ . Assim

$$\|(1-t) \cdot (x-a)\| + \|t \cdot (y-a)\| = (1-t) \cdot \|(x-a)\| + t \cdot \|(y-a)\| < (1-t) \cdot r + t \cdot r = r$$

Portanto, se  $x, y \in B(a, r)$ , então  $[x, y] \in B(a, r)$ .  $\square$

**Exemplo A.25.** Se o espaço  $X$  é contrátil, então para todo  $Y$  o produto cartesiano  $X \times Y$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $Y$ .

**Prova:** De fato, por  $X$  ser contrátil, temos  $id_X \simeq c, c : X \rightarrow X$ , onde  $c(x) = p$ , isto é, existe uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow X$  tal que  $H(x, 0) = id_X(x) = x$  e  $H(x, 1) = c(x) = p$ . Defina  $f : X \times Y \rightarrow Y$  por  $f(x, y) = y$  e  $g : Y \rightarrow X \times Y$  com sendo  $g(y) = (p, y)$ . Então

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(p, y) = y = id_Y(y)$$

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(y) = (p, y)$$

Agora, mostremos que  $g \circ f \simeq id_{X \times Y}$ . Para isto, defina  $G : (X \times Y) \times I \rightarrow X \times Y$  por  $G((x, y), t) = (H(x, t), y)$ . Assim,  $G((x, y), 0) = id_{X \times Y}(x, y)$  e  $G((x, y), 1) = g \circ f(x, y)$ . Como  $id_Y = f \circ g \simeq f \circ g$  e  $g \circ f \simeq id_{X \times Y}$ , segue que  $X \times Y$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $Y$ .  $\square$

## 4 Homotopia de Caminhos

A partir de agora consideraremos um caso particular do conceito geral de homotopia. Estudaremos homotopias de caminhos, dedicando atenção especial aos caminhos fechados, que são aqueles em que  $a(0) = a(1)$ .

Como o intervalo  $I$  é contrátil, todo caminho  $a : I \rightarrow X$  é homotópico a uma constante. Exigiremos que durante a homotopia os extremos sejam mantidos fixos, assim consideraremos a fronteira  $\partial I = \{0, 1\}$  do intervalo  $I$  e as homotopias de caminhos serão todas relativas ao subespaço  $\partial I$ .

**Definição A.26.** Dois caminhos  $a, b : I \rightarrow X$  com as mesmas extremidades, isto é,  $a(0) = b(0) = x_0$  e  $a(1) = b(1) = x_1$  são homotópicos se existir uma aplicação  $H : I \times I \rightarrow X$  contínua tal que, para todo  $s, t \in I$ ,  $H$  satisfaça

$$H(s, 0) = a(s)$$

$$H(s, 1) = b(s)$$

$$H(0, t) = a(0) = b(0) = x_0$$

$$H(1, t) = a(1) = b(1) = x_1$$

**Notação :**  $a \simeq b$  (rel.  $\partial I$ ).

Em particular os caminhos fechados  $a, b : I \rightarrow X$  são homotópicos quando existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que para  $a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = x_0, x_0 \in X$  e para todo  $s, t \in I$ , têm-se

$$H(s, 0) = a(s)$$

$$H(s, 1) = b(s)$$

$$H(0, t) = H(1, t) = x_0$$

Note que a relação  $a \simeq b$  (*rel.  $\partial I$* ) é uma relação de equivalência. Mostramos tal fato de modo análogo ao utilizado na Proposição A.3.

Continuaremos indicando com  $\alpha = [a]$  a classe de homotopia do caminho  $a : I \rightarrow X$ , isto é, o conjunto de todos os caminhos em  $X$  que possuem as mesmas extremidades que  $a$  e são homotópicos a  $a$  com extremos fixos durante a homotopia.

**Exemplo A.27.** Seja  $X$  um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $a, b : I \rightarrow X$  são caminhos com as mesmas extremidades, então  $a \simeq b$  (*rel.  $\partial I$* ).

**Prova:** Defina uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  por  $H(s, t) = (1 - t) \cdot a(s) + t \cdot b(s)$ . Assim,  $H(s, 0) = a(s)$ ,  $H(s, 1) = b(s)$ ,  $H(0, t) = a(0) = b(0)$  e  $H(1, t) = a(1) = b(1)$   $\square$

Sejam  $a, b : I \rightarrow X$  caminhos tais que  $a(1) = b(0)$ . Definimos o produto  $ab$  como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro  $a$  e depois  $b$ . Definimos  $ab : I \rightarrow X$  por

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ b(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $a(1) = b(0)$ . Logo, pelo Lema da Colagem,  $ab$  é contínuo e define um caminho ligando  $a(0)$  e  $b(1)$ .

O caminho inverso de  $a : I \rightarrow X$  é, por definição,  $a^{-1} : I \rightarrow X$  dado por  $a^{-1}(s) = a(1 - s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . Indicaremos  $c_{x_0} : I \rightarrow X$  por  $c_{x_0}(s) = x_0$  o caminho constante em  $x_0$ ,  $x_0 \in X$ . Para sua classe de homotopia usaremos a notação  $\epsilon_{x_0} = [c_{x_0}]$ .

O conjunto dos caminhos num espaço topológico  $X$ , munido da lei de composição e do inverso introduzido anteriormente, não cumpre nenhum dos axiomas de grupo. A saber, o produto  $ab$  não está definido para qualquer par de caminhos  $a, b$ , mas apenas quando  $a(1) = b(0)$ . A associatividade também não é válida, pois

$$(ab)c(s) = \begin{cases} ab(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ c(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} a(4s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ b(4s - 1), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ c(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$a(bc)(s) = \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ bc(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ b(4s - 2), & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ c(4s - 3), & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Tampouco existe o elemento neutro da multiplicação, uma vez que se existe  $a : I \rightarrow X$  tal que  $a(0) = x_0$  e  $a(1) = x_1$ , não se tem  $c_{x_0}, c_{x_1} : I \rightarrow X$  de modo que  $c_{x_0}a = a$  e  $ac_{x_1} = a$  e  $aa^{-1} \neq c_{x_0}$  e  $a^{-1}a \neq c_{x_1}$ .

Para a próxima proposição consideraremos que seja válido  $a(1) = a'(1) = b(0) = b'(0)$ .

**Proposição A.28.** Se  $a \simeq a'$  (*rel.  $\partial I$* ), e  $b \simeq b'$  (*rel.  $\partial I$* ), então  $ab \simeq a'b'$  (*rel.  $\partial I$* ) e  $a^{-1} \simeq (a')^{-1}$  (*rel.  $\partial I$* ).

**Prova:** Se  $H : a \simeq a'$  (*rel.  $\partial I$* ) e  $K : b \simeq b'$  (*rel.  $\partial I$* ), então  $H, K : I \times I \rightarrow X$  satisfazem

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= a(s), & K(s, 0) &= b(s), \\ H(s, 1) &= a'(s), & K(s, 1) &= b'(s), \\ H(0, t) &= a(0) = a'(0), & K(0, t) &= b(0) = b'(0), \\ H(1, t) &= a(1) = a'(1), & K(1, t) &= b(1) = b'(1). \end{aligned}$$



Defina  $L : I \times I \rightarrow X$  por

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(2s - 1, t) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $H(1, t) = a(1) = b(0) = K(0, t)$ . Como  $H$  e  $K$  são contínuas, pelo Lema da Colagem temos que  $L$  também é contínua. Além disso,  $L(s, 0) = ab(s)$ ,  $L(s, 1) = a'b'(s)$ ,  $L(0, t) = H(0, t) = ab(0) = a'b'(0)$  e  $L(1, t) = K(1, t) = ab(1) = a'b'(1)$ . Portanto,  $ab \simeq a'b'$  (*rel.  $\partial I$* ).

Agora, para mostrarmos que  $a^{-1} \simeq (a')^{-1}$  (*rel.  $\partial I$* ), basta definir  $G : I \times I \rightarrow X$  por  $G(s, t) = H(1 - s, t)$ , assim  $G(s, 0) = a^{-1}(s)$ ,  $G(s, 1) = (a')^{-1}(s)$ ,  $G(0, t) = a^{-1}(0) = (a')^{-1}(0)$  e  $G(1, t) = a^{-1}(1) = (a')^{-1}(1)$ .  $\square$

**Definição A.29.** Num espaço topológico  $X$ , sejam  $\alpha = [a]$  e  $\beta = [b]$ , onde  $a$  é um caminho ligando  $x$  a  $y$  e  $b$  um caminho ligando  $y$  a  $z$  com  $x, y, z \in X$ . Definimos o produto  $\alpha\beta$  como sendo

$$\alpha \cdot \beta = [a] \cdot [b] = [ab]$$

A Proposição A.28 mostra que  $\alpha \cdot \beta$  é bem definida. De modo análogo, definimos  $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$ , onde  $a \in \alpha = [a]$ . Novamente, a Proposição A.28 mostra que  $\alpha^{-1}$  está bem definida.

**Definição A.30.** Sejam  $a : I \rightarrow X$  um caminho e  $\phi : I \rightarrow I$  uma parametrização de  $I$ , isto é, uma função contínua tal que  $\phi(\partial I) \subset \partial I$ . O caminho  $b : I \rightarrow X$  definido por  $b = a \circ \phi$  chama-se uma reparametrização do caminho  $a$ . A parametrização diz-se positiva quando  $\phi(0) = 0$  e  $\phi(1) = 1$ ; negativa se  $\phi(0) = 1$  e  $\phi(1) = 0$ ; e trivial quando  $\phi(0) = \phi(1)$ .

**Proposição A.31.** Seja  $b = a \circ \phi$  uma reparametrização do caminho  $a : I \rightarrow X$ . Temos

- (a) Se  $\phi$  for positiva, então  $b \simeq a$  (*rel.  $\partial I$* ).
- (b) Se  $\phi$  for negativa, então  $b \simeq a^{-1}$  (*rel.  $\partial I$* ).
- (c) Se  $\phi$  for trivial, então  $b$  é homotópico a uma constante relativamente ao bordo de  $I$ .

**Prova:** De acordo com o Exemplo A.27, dois caminhos em  $I$  que possuem as mesmas extremidades são homotópicos. Assim, defina  $i, j : I \rightarrow I$  caminhos contínuos dados por  $i(s) = s$  e  $j(s) = 1 - s$ .

(a) Se  $\phi$  for positiva,  $\phi(0) = 0 = i(0)$  e  $\phi(1) = 1 = i(1)$ . Do Exemplo A.27, concluímos  $\phi \simeq i$  (*rel.  $\partial I$* ). Agora, sabemos que a composição de funções preserva homotopias (Proposição A.4), assim  $a \circ \phi \simeq a \circ i$  (*rel.  $\partial I$* ). Como  $b = a \circ \phi$  e  $a \circ i = a$ , temos  $b \simeq a$  (*rel.  $\partial I$* ).

(b) Se  $\phi$  for negativa, temos  $\phi \simeq j$  (*rel.  $\partial I$* ), pois  $\phi(0) = 1 = j(0)$  e  $\phi(1) = 0 = j(1)$ . Assim, pela Proposição A.4,  $a \circ \phi \simeq a \circ j$  (*rel.  $\partial I$* ). Como  $b = a \circ \phi$  e  $a \circ j = a^{-1}$ , concluímos  $b \simeq a^{-1}$  (*rel.  $\partial I$* ).

(c) Se  $\phi$  for trivial, então  $\phi(0) = \phi(1) = t_0 = c_{t_0}(0) = c_{t_0}(1)$ . Pelo Exemplo A.27  $\phi \simeq c_{t_0}$  (*rel.  $\partial I$* ). Seja  $H : I \times I \rightarrow I$  uma aplicação contínua tal que  $H : \phi \simeq c_{t_0}$  (*rel.  $\partial I$* ). Defina  $G : I \times I \rightarrow X$  por  $G = a \circ H$ , assim temos

$$\begin{aligned} G(s, 0) &= a \circ H(s, 0) = a \circ \phi(s) = b(s) \\ G(s, 1) &= a \circ H(s, 1) = a \circ c_{t_0}(s) = c_{a(t_0)}(s) \\ G(0, t) &= a \circ H(0, t) = b(0) = a(t_0) = c_{a(t_0)}(0) \\ G(1, t) &= a \circ H(1, t) = b(1) = a(t_0) = c_{a(t_0)}(1) \end{aligned}$$

Portanto,  $b \simeq c_{a(t_0)}$  (*rel.  $\partial I$* ).  $\square$

Suponhamos que sejam dados um caminho  $a : I \rightarrow X$  e pontos intermediários  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$  que determinam uma decomposição de  $I$  em  $k$  intervalos  $[s_{i-1}, s_i]$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ , obtemos um caminho  $a_i : I \rightarrow X$  definido por  $a_i = (a|_{[s_{i-1}, s_i]}) \circ \phi_i$ , onde  $\phi_i : I \rightarrow [s_{i-1}, s_i]$  é a única função linear tal que  $\phi_i(0) = s_{i-1}$  e  $\phi_i(1) = s_i$ . Portanto, os caminhos  $a_i$  são reparametrizações das restrições  $a|_{[s_{i-1}, s_i]}$ .

**Corolário A.32.** *Dados um caminho  $a : I \rightarrow X$  e pontos  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ , seja, para cada  $i = 1, \dots, k$ , o caminho  $a_i : I \rightarrow X$  dado por  $a_i = (a|_{[s_{i-1}, s_i]}) \circ \phi_i$ , onde  $\phi_i : I \rightarrow [s_{i-1}, s_i]$  é o homeomorfismo  $\phi_i(s) = (s_i - s_{i-1}) \cdot s + s_{i-1}$ . Então, pondo  $b = a_1 a_2 \dots a_k$ , têm-se  $b \simeq a$  (rel.  $\partial I$ ).*

**Prova:** Como  $\phi_i(0) = s_{i-1}$  e  $\phi_i(1) = s_i$ , temos que  $\phi_i$  é uma parametrização positiva. Portanto, pela Proposição A.31,  $a_i \simeq a|_{[s_{i-1}, s_i]}$  (rel.  $\partial I$ ). Logo,

$$b = a_1 a_2 \dots a_k \simeq a|_{[0, s_1]} a|_{[s_1, s_2]} \dots a|_{[s_{k-1}, 1]} = a \text{ (rel. } \partial I \text{)}. \quad \square$$

**Proposição A.33.** *Sejam  $\alpha = [a], \beta = [b], \gamma = [c]$ , onde  $a, b, c : I \rightarrow X$  caminhos com  $a(0) = x, a(1) = b(0) = y$  e  $b(1) = c(0) = z$ , com  $x, y, z \in X$ . Tomando  $c_x$  e  $c_y$  como os caminhos constantes em  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\epsilon_x = [c_x]$  e  $\epsilon_y = [c_y]$ . Têm-se então*

1.  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \epsilon_x$
2.  $\alpha^{-1} \cdot \alpha = \epsilon_y$
3.  $\epsilon_x \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot \epsilon_y$
4.  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

**Prova:** 1) Queremos mostrar que  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \epsilon_x$ . Para isto, verificaremos que  $aa^{-1} \simeq c_x$  (rel.  $\partial I$ ). Defina  $\phi_1 : I \rightarrow I$  por

$$\phi_1(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2s, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\phi_1(\frac{1}{2}) = 1$ , logo, pelo Lema da Colagem,  $\phi_1$  é contínua. Ainda,  $\phi_1(0) = 0 = \phi_1(1)$ , então  $\phi_1$  é trivial. Pela Proposição A.31,  $b = a \circ \phi_1 \simeq a \circ c_0 = c_{a(0)} = c_x$  (rel.  $\partial I$ ). Mas  $b = a \circ \phi_1(s) = aa^{-1}(s)$ . Logo,  $aa^{-1} \simeq c_x$  (rel.  $\partial I$ ).

2) Mostrar que  $\alpha^{-1} \cdot \alpha = \epsilon_y$  equivale a verificar que  $a^{-1}a \simeq c_y$  (rel.  $\partial I$ ). Defina  $\phi_2 : I \rightarrow I$  por

$$\phi_2(s) = \begin{cases} 1 - 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\phi_2(\frac{1}{2}) = 0$ , logo, pelo Lema da Colagem,  $\phi_2$  é contínua. Ainda,  $\phi_2(0) = 1 = \phi_2(1)$ , então  $\phi_2$  é trivial. Pela Proposição A.31,  $b = a \circ \phi_2 \simeq a \circ c_1 = c_{a(1)} = c_y$  (rel.  $\partial I$ ). Mas  $b = a \circ \phi_2(s) = a^{-1}a(s)$ . Logo,  $a^{-1}a \simeq c_y$  (rel.  $\partial I$ ).

3)(i) Devemos mostrar que  $\epsilon_x \cdot \alpha = \alpha$ . Para isto, basta verificar que  $c_x a \simeq a$  (rel.  $\partial I$ ). Defina  $\phi_3 : I \rightarrow I$  por

$$\phi_3(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\phi_3(\frac{1}{2}) = 0$ , logo, pelo Lema da Colagem,  $\phi_3$  é contínua. Ainda,  $\phi_3(0) = 0$  e  $\phi_3(1) = 1$ , então  $\phi_3$  é positiva. Pela Proposição A.31,  $b = a \circ \phi_3 \simeq a$  (rel.  $\partial I$ ). Mas  $b = a \circ \phi_3(s) = c_x a(s)$ . Logo,  $c_x a \simeq a$  (rel.  $\partial I$ ).

(ii) Devemos mostrar que  $\alpha \cdot \epsilon_y = \alpha$ . Para isto, basta verificar que  $ac_y \simeq a$  (*rel.  $\partial I$* ). Defina  $\phi'_3 : I \rightarrow I$  por

$$\phi'_3(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\phi'_3(\frac{1}{2}) = 1$ , pelo Lema da Colagem,  $\phi'_3$  é contínua. Ainda,  $\phi'_3(0) = 0$  e  $\phi'_3(1) = 1$ , então  $\phi'_3$  é positiva. Pela Proposição A.31,  $b = a \circ \phi'_3 \simeq a$  (*rel.  $\partial I$* ). Mas  $b = a \circ \phi'_3(s) = ac_y(s)$ . Logo,  $ac_y \simeq a$  (*rel.  $\partial I$* ).

4) Devemos mostrar que  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ . Para isto, basta verificar que  $(ab)c \simeq a(bc)$  (*rel.  $\partial I$* ). Defina  $\phi_4 : I \rightarrow I$  por

$$\phi_4(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ s + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{s+1}{2}, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que para  $s = \frac{1}{4}$ ,  $\phi_4(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ ; para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\phi_4(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ , logo, pelo Lema da Colagem,  $\phi_4$  é contínua. Ainda,  $\phi_4(0) = 0$  e  $\phi_4(1) = 1$ , então  $\phi_4$  é positiva. Pela Proposição A.31,  $d = a(bc) \circ \phi_4 \simeq a(bc)$  (*rel.  $\partial I$* ). Mas  $d = a(bc) \circ \phi_4(s) = (ab)c(s)$ . Logo,  $(ab)c \simeq a(bc)$  (*rel.  $\partial I$* )  $\square$

**Definição A.34.** O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos em um espaço topológico  $X$ , munido da lei de composição definida anteriormente, chama-se grupoide fundamental de  $X$ .

**Notação:**  $\Pi(x)$ .

## 5 O Grupo Fundamental

Consideraremos pares do tipo  $(X, x_0)$ , onde  $x_0 \in X$  é chamado ponto básico do espaço topológico  $X$ . Os caminhos fechados  $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  serão chamados caminhos fechados com base no ponto  $x_0$ .

**Proposição A.35.** O subconjunto  $\pi_1(X, x_0)$  do grupoide fundamental formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em  $x_0$  constitui um grupo.

**Prova:** De fato, pela Proposição A.33 se conclui este resultado. A saber

- (i) Para todos  $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(X, x_0)$ , temos  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ . Logo, é válida a associativa.
- (ii)  $\epsilon_{x_0}$  é o elemento neutro de  $\pi_1(X, x_0)$ , pois para todo  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ , é válido que  $\epsilon_{x_0} \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot \epsilon_{x_0}$ . Logo, há elemento neutro.
- (iii) Para todo  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ , temos que  $\alpha^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$  é o elemento inverso, pois  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \epsilon_{x_0} = \alpha^{-1} \cdot \alpha$ . Logo, há elemento inverso.

Portanto,  $\pi_1(X, x_0)$  possui estrutura de grupo.  $\square$

**Definição A.36.** Chamamos  $\pi_1(X, x_0)$  de grupo fundamental de  $X$  com base em  $x_0$ .

**Agradecimentos:** Agradeço à FAPESP–Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo financiamento. Agradeço também o Prof. Dr. João Peres Vieira pela orientação e pelo apoio dado durante o desenvolvimento deste projeto.

*Abstract: In this work we will define the fundamental group. For this we will need of the concept of homotopic applications, homotopy classes, homotopy type, homotopy of paths and relative homotopy. Also we will present some examples and results.*

*Keywords: Homotopic Applications; Homotopy Classes; Homotopy Type; Fundamental group.*

---

## Referências Bibliográficas

- [1] Croom, Fred H., *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1978.
- [2] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e espaços de Recobrimento*, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 1977.
- [3] Munkres, J. R., *Topology A First Course*, Prentice-Hall, 1975.
- [4] Wall, C. T. C., *A Geometric Introduction to Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [5] Wallace, A. H., *An Introduction to algebraic Topology*, Pergamon Press, 1967.

## BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA · BICMAT

### *Orientação aos autores*

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem  $\text{\LaTeX}$ , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em [www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat), assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.