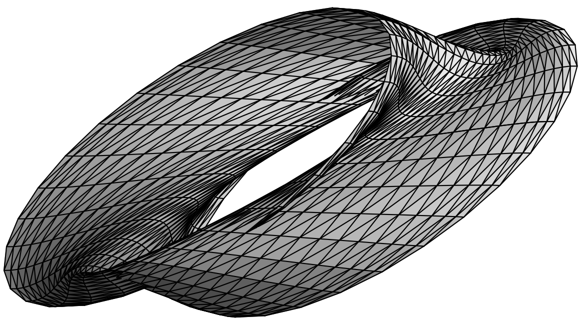
ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat



Volume XI
Outubro de 2014
Departamento de Matemática
IGCE – Rio Claro

unesp

ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE – Unesp – Rio Claro

Editorial

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

`www.rc.unesp.br/igce/matematica`

Sumário

Axioma da Homotopia

Alex Melges Barbosa[1]
Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

Resumo: Neste trabalho faremos uma breve introdução sobre os Axiomas de Eilenberg–Steenrod e definiremos homotopia de pares com o objetivo de mostrar que a Homologia Singular satisfaz o Quinto Axioma de Eilenberg–Steenrod (o Axioma da Homotopia).

Palavras-chave: Homologia Singular; Homotopia; Axiomas de Eilenberg–Steenrod

1 Introdução

A axiomática de Eilenberg–Steenrod, proposta em 1945, estabelece que toda Teoria de Homologia deve satisfazer sete axiomas, conhecidos como os Axiomas de Eilenberg–Steenrod, que englobam uma larga classe de espaços topológicos, em que as teorias de homologia existentes coincidem.

Para enunciarmos os axiomas, considere X, Y e Z espaços topológicos e A, B e C seus respectivos subespaços.

Axioma 1 (Identidade). Se $f : (X, A) \to (X, A)$ é a aplicação identidade do par (X, A), então $\overline{f}_{*q} : H_q(X, A) \to H_q(X, A)$ é o homomorfismo identidade de $H_q(X, A)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Axioma 2. Se $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (Z, C)$ são aplicações contínuas, então $\overline{(g \circ f)}_{*q} = \overline{g}_{*q} \circ \overline{f}_{*q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Axioma 3. Se $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação contínua, então o

[1]Bolsista FAPESP - Processo 2013/04571-2

diagrama

$$
\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\Delta_q"] \arrow[d, "\overline{f}_{*q}"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "f'_{*q}"] \\
H_q(Y,B) \arrow[r, "\Delta'_q"] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}
$$

é comutativo para todo $q \in \mathbb{Z}$, em que $f' = f|_A$.

Axioma 4 (Sequência Exata). Para todo par (X, A), a sequência longa de homologia do par (X, A), descrita por

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(X,A) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

é uma sequência exata para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Axioma 5 (Homotopia). Se as aplicações contínuas $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas, então $\overline{f}_{*q} = \overline{g}_{*q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Axioma 6 (Excisão). Se $U \subset X$ é um subconjunto aberto de X tal que $\overline{U} \subset int(A)$, então a aplicação contínua inclusão $e : (X - U, A - U) \to (X, A)$ induz um isomorfismo $\overline{e}_{*q} : H_q(X - U, A - U) \to H_q(X, A)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Axioma 7. Se $P = \{x_0\}$ é um espaço topológico unitário, então $H_q(P) = 0$ para $q \neq 0$.

Definição 1. O grupo $H_0(P)$, com $P = \{x_0\}$, é chamado grupo de coeficientes da Teoria de Homologia.

Para que uma determinada teoria seja uma Teoria de Homologia é necessário que ela satisfaça os sete axiomas de Eilenberg–Steenrod.

Neste trabalho, o grupo de coeficientes considerado será $\mathbb{Z}$ e teremos como objetivo mostrar a validade do quinto Axioma para a Homologia Singular.

2 Propriedades de Homotopia

Primeiramente, vamos relembrar o conceito de homotopia de pares:

Definição 2. Sejam $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ aplicações contínuas de pares. Se existir $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ aplicação contínua de pares tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, dizemos que f e g são homotópicas. Denotaremos $f \simeq g$ ou $F : f \simeq g$.

Proposição 3. *A homotopia de pares é uma relação de equivalência.*

Prova: Sejam $f, g, h : (X, A) \to (Y, B)$ aplicações contínuas de pares. Então valem as seguintes propriedades:

i) Reflexiva:

Defina $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ por $F(x, t) = f(x)$. Logo, F é contínua, $F(x, 0) = f(x) = F(x, 1)$ e $F(A \times I) = f(A) \subset B$, ou seja, $F : f \simeq f$.

ii) Simétrica:

Considere $F : f \simeq g$. Defina $G : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ por $G(x, t) = F(x, 1-t)$. Então, G é contínua, $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$, $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ e $G(A \times I) = F(A \times I) \subset B$, isto é, $G : g \simeq f$.

iii) Transitiva:

Considere $F : f \simeq g$ e $G : g \simeq h$. Defina $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ por $H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

Logo, desde que para $t = \frac{1}{2}$ temos que $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ e sendo F e G contínuas, segue, pelo Lema da Colagem, que H é contínua. Ainda, $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ e $H(A \times I) = F(A \times I) \cup G(A \times I) \subset B$. Portanto, $H : f \simeq h$.

Assim, a homotopia de pares é uma relação de equivalência. ■

Definição 4. Se $f : (X,A) \to (Y,B)$ e $g : (Y,B) \to (X,A)$ forem aplicações contínuas de pares tais que $f \circ g \simeq Id_{(Y,B)}$ e $g \circ f \simeq Id_{(X,A)}$, dizemos que (X,A) e (Y,B) possuem o mesmo tipo de homotopia. Ainda, f e g são uma equivalência homotópica.

3 Homotopia de Cadeias

Definição 5. Sejam $C = (C_q, \partial_q)$ e $C' = (C'_q, \partial'_q)$ complexos de cadeias e $\phi, \psi : C \to C'$ aplicações de cadeias. Dizemos que ϕ e ψ são homotópicas se existir uma família de homomorfismos $D = (D_q : C_q \to C'_{q+1})$ satisfazendo $\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = \phi_q - \psi_q$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, onde os quadrados do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "\psi_{q+1}"', "\phi_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\psi_q"', "\phi_q"] \arrow[dl, "D_q"'] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{q-1}"', "\phi_{q-1}"] \arrow[dl, "D_{q-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] & C'_{q-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

são comutativos. Neste caso, dizemos que D é uma homotopia de cadeias.

Proposição 6. *A homotopia de cadeias é uma relação de equivalência.*

Prova: Sejam $\phi, \psi, \theta : C \to C'$ aplicações de cadeias. Então valem as seguintes propriedades:

i) Reflexiva:

Considere $D = (D_q : C_q \to C'_{q+1})$, onde $D_q = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Então, $\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = 0 = \phi_q - \phi_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Logo, $D : \phi \simeq \phi$.

ii) Simétrica:

Considere $D : \phi \simeq \psi$. Então, $-D = (-D_q : C_q \to C'_{q+1})$ é tal que $\partial'_{q+1} \circ (-D_q) + (-D_{q-1}) \circ \partial_q = -(\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q) = -(\phi_q - \psi_q) = \psi_q - \phi_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Logo, $-D : \psi \simeq \phi$.

iii) Transitiva:

Considere $D : \phi \simeq \psi$ e $E : \psi \simeq \theta$. Então, $F = D + E = (D_q + E_q : C_q \to C'_{q+1})$ é tal que $\partial'_{q+1} \circ (D_q + E_q) + (D_{q-1} + E_{q-1}) \circ \partial_q = (\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q) + (\partial'_{q+1} \circ E_q + E_{q-1} \circ \partial_q) = (\phi_q - \psi_q) + (\psi_q - \theta_q) = \phi_q - \theta_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Logo, $F : \phi \simeq \theta$.

Portanto, a homotopia de cadeias é uma relação de equivalência. ■

Proposição 7. *Sejam C, C', C'' complexos de cadeias. Se $D : \phi \simeq \psi$ e $D' : \phi' \simeq \psi'$ são homotopias de cadeias, então $\phi' \circ \phi \simeq \psi' \circ \psi$ também será uma homotopia de cadeias.*

Prova: Como $D : \phi \simeq \psi$ e $D' : \phi' \simeq \psi'$ temos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, shift right, "\psi_{q+1}"'] \arrow[d, shift left, "\phi_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, shift right, "\psi_q"'] \arrow[d, shift left, "\phi_q"] \arrow[dl, "D_q"'] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\psi_{q-1}"'] \arrow[d, shift left, "\phi_{q-1}"] \arrow[dl, "D_{q-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] \arrow[d, shift right, "\psi'_{q+1}"'] \arrow[d, shift left, "\phi'_{q+1}"] & C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[d, shift right, "\psi'_q"'] \arrow[d, shift left, "\phi'_q"] \arrow[dl, "D'_q"'] & C'_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\psi'_{q-1}"'] \arrow[d, shift left, "\phi'_{q-1}"] \arrow[dl, "D'_{q-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C''_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & C''_q \arrow[r, "\partial''_q"] & C''_{q-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

onde os quadrados são comutativos, $\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = \phi_q - \psi_q$ e $\partial''_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial'_q = \phi'_q - \psi'_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Defina $D'' = (D'_q \circ \psi_q + \phi'_{q+1} \circ D_q : C_q \to C''_{q+1})$. Então,

$\partial''_{q+1} \circ D''_q + D''_{q-1} \circ \partial_q =$

$\partial''_{q+1} \circ (D'_q \circ \psi_q + \phi'_{q+1} \circ D_q) + (D'_{q-1} \circ \psi_{q-1} + \phi'_q \circ D_{q-1}) \circ \partial_q =$

$(\partial''_{q+1} \circ D'_q \circ \psi_q + D'_{q-1} \circ \psi_{q-1} \circ \partial_q) + (\partial''_{q+1} \circ \phi'_{q+1} \circ D_q + \phi'_q \circ D_{q-1} \circ \partial_q) =$
$(\partial''_{q+1} \circ D'_q \circ \psi_q + D'_{q-1} \circ \partial'_q \circ \psi_q) + (\phi'_q \circ \partial'_{q+1} \circ D_q + \phi'_q \circ D_{q-1} \circ \partial_q) =$
$(\partial''_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial'_q) \circ \psi_q + \phi'_q \circ (\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q) =$
$(\phi'_q - \psi'_q) \circ \psi_q + \phi'_q \circ (\phi_q - \psi_q) =$
$\phi'_q \circ \phi_q - \psi'_q \circ \psi_q$. ■

Proposição 8. *Sejam $\phi, \psi : C \to C'$ aplicações de cadeias. Se $D : \phi \simeq \psi$ for uma homotopia de cadeias, então $\phi_{*q} = \psi_{*q} : H_q(C) \to H_q(C')$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.*

Prova: Como $D : \phi \simeq \psi$, então $\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = \phi_q - \psi_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Considere $x \in Ker(\partial_q)$ qualquer. Assim, $\phi_q(x) - \psi_q(x) = \partial'_{q+1} \circ D_q(x) + D_{q-1} \circ \partial_q(x) = \partial'_{q+1}(D_q(x))$, ou seja, $\phi_q - \psi_q \in Im(\partial'_{q+1})$, isto é, $[\phi_q(x)] = [\psi_q(x)] \in H_q(C')$.

Portanto, $\phi_{*q}([x]) = \psi_{*q}([x])$ para qualquer $[x] \in H_q(C)$ e para todo $q \in \mathbb{Z}$. ■

Definição 9. Sejam C e C' complexos de cadeias. Uma aplicação $\phi : C \to C'$ é uma equivalência de cadeias se existir uma aplicação $\psi : C' \to C$ tal que $\phi \circ \psi \simeq Id_{C'}$ e $\psi \circ \phi \simeq Id_C$.

Sejam $i_k : (X, A) \to (X \times I, A \times I)$, $k = 0, 1$, duas aplicações inclusões definidas por $i_k(x) = (x, k)$, para qualquer $x \in X$ e $k = 0, 1$. Então, $f = F \circ i_0$ e $g = F \circ i_1$, onde $F : f \simeq g$.

Lema 10. *$(i_0)_{\#q} \simeq (i_1)_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.*

Prova: A ideia é construir uma família de homomorfismos $D_q(X) : C_q(X) \to C_{q+1}(X \times [0, 1])$ satisfazendo $(i_0)_{\#q} - (i_1)_{\#q} = \partial'_{q+1} \circ D_q(X) + D_{q-1}(X) \circ \partial_q$, para todo $q \in \mathbb{Z}$ e a condição de naturalidade. Para maiores detalhes veja

[4, 9,9.2, p. 99–105]. ■

Proposição 11. *Se* $f \simeq g : X \to Y$*, então* $f_{\#q} \simeq g_{\#q} : C_q(X) \to C_q(Y)$ *para todo* $q \in \mathbb{Z}$*.*

Prova: Considere $F : f \simeq g : X \to Y$. Então, $f = F \circ i_0$ e $g = F \circ i_1$, ou seja, $f_{\#q} = F_{\#q} \circ (i_0)_{\#q}$ e $g_{\#q} = F_{\#q} \circ (i_1)_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema anterior, $(i_0)_{\#q} \simeq (i_1)_{\#q}$ e pela Proposição 7, $F_{\#q} \circ (i_0)_{\#q} \simeq F_{\#q} \circ (i_1)_{\#q}$.

Logo, $f_{\#q} \simeq g_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. ■

Corolário 12. *Se* $f, g : X \to Y$ *são aplicações homotópicas, então* $f_{*q} = g_{*q} : H_q(X) \to H_q(Y)$*.*

Prova: Como f e g são homotópicas, então pela Proposição anterior, $f_{\#q} \simeq g_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Ainda, pela Proposição 8, segue que $f_{*q} = g_{*q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. ■

4 Quinto Axioma de Eilenberg–Steenrod: Axioma da Homotopia

Nosso próximo objetivo será ampliar os conceitos estudados para a homologia relativa e, assim, provar que a Homologia Singular satisfaz o Quinto Axioma de Eilenberg–Steenrod.

Para isto, começaremos vendo a naturalidade da definição de $D_q(X)$ aplicada à inclusão $i : A \subset X \to X$, onde X é um espaço topológico qualquer.

Deste modo, $D_q(X)|_{C_q(A)} = D_q(A)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Sendo $F : f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ uma homotopia de pares, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
C_q(A) \arrow[r, "D_q(A)"] \arrow[d, "i_{\#q}"] & C_{q+1}(A \times I) \arrow[r, "F'_{\#q+1}"] \arrow[d, "(i\times Id)_{\#q+1}"] & C_{q+1}(B) \arrow[d, "i'_{\#q+1}"] \\
C_q(X) \arrow[r, "D_q(X)"] & C_{q+1}(X \times I) \arrow[r, "F_{\#q+1}"] & C_{q+1}(Y)
\end{tikzcd}$$

onde $F'_{\#q+1} = F_{\#q+1}|_{C_{q+1}(A\times I)}$ e $i' : B \subset Y \to Y$ é a inclusão.

Assim, podemos, por passagem o quociente, definir uma família de homomorfismos $\overline{E}_q : C_q(X, A) \to C_{q+1}(Y, B)$ por $\overline{E}_q(T + C_q(A)) = E_q(T) + C_{q+1}(B)$, onde $E_q = F_{\#q+1} \circ D_q(X)$.

Mostremos, então, que $\overline{E}_q : \overline{f}_{\#q} \simeq \overline{g}_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\overline{\delta}_{q+1} \circ \overline{E}_q + \overline{E}_{q-1} \circ \overline{\partial}_q = \overline{f}_{\#q} - \overline{g}_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$, onde:

- $\overline{\delta}_{q+1} : C_{q+1}(Y, B) \to C_q(Y, B)$ é dado por $\overline{\delta}_{q+1}(T + C_{q+1}(B)) = \delta_{q+1}(T) + C_q(B)$;

- $\overline{\partial}_q : C_q(X, A) \to C_{q-1}(X, A)$ é dado por $\overline{\partial}_q(T + C_q(A)) = \partial_q(T) + C_{q-1}(A)$;

- $\overline{f}_{\#q}, \overline{g}_{\#q} : C_q(X, A) \to C_q(Y, B)$ são dados por $\overline{f}_{\#q}(T + C_q(A)) = f_{\#q}(T) + C_q(B)$ e $\overline{g}_{\#q}(T + C_q(A)) = g_{\#q}(T) + C_q(B)$, respectivamente.

De fato, sendo $T + C_q(A)$ um gerador de $C_q(X, A)$, temos:
$[\overline{\delta}_{q+1} \circ \overline{E}_q + \overline{E}_{q-1} \circ \overline{\partial}_q](T + C_q(A)) =$
$[\overline{\delta}_{q+1} \circ \overline{E}_q](T + C_q(A)) + [\overline{E}_{q-1} \circ \overline{\partial}_q](T + C_q(A)) =$
$\overline{\delta}_{q+1}(E_q(T) + C_{q+1}(B)) + \overline{E}_{q-1}(\partial_q(T) + C_{q-1}(A)) =$
$[\delta_{q+1}(E_q(T) + E_{q-1}(\partial_q(T))] + C_q(B) =$
$\{\delta_{q+1}[F_{\#q+1} \circ D_q(X)](T) + [F_{\#q} \circ D_{q-1}(X)](\partial_q(T))\} + C_q(B) =$
$\{F_{\#q}[\partial_{q+1} \circ D_q(X)](T) + [F_{\#q} \circ D_{q-1}(X)](\partial_q(T))\} + C_q(B) =$
$F_{\#q}[\partial_{q+1} \circ D_q(X) + D_{q-1} \circ \partial_q](T) + C_q(B) =$

$F_{\#q} \circ [((i_0)_{\#q} - (i_1)_{\#q})(T)] + C_q(B) =$
$[(F \circ i_0)_{\#q}(T) - (F \circ i_1)_{\#q}(T)] + C_q(B) =$
$(f_{\#q}(T) - g_{\#q}(T)) + C_q(B) =$
$[f_{\#q}(T) + C_q(B)] - [g_{\#q}(T) + C_q(B)] =$
$\overline{f}_{\#q}(T + C_q(A)) - \overline{g}_{\#q}(T + C_q(A)) =$
$[\overline{f}_{\#q} - \overline{g}_{\#q}](T + C_q(A))$.

Logo, acabamos de provar a:

Proposição 13. *Se* $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ *é uma homotopia de pares, então* $\overline{f}_{\#q} \simeq \overline{g}_{\#q} : C_q(X, A) \to C_q(Y, B)$ *é uma homotopia de cadeias para todo* $q \in \mathbb{Z}$*.*

Agora, temos as ferramentas necessárias para mostrar a validade do quinto Axioma de Eilenberg–Steenrod.

Teorema 14. *Se* $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ *é uma homotopia de pares, então* $\overline{f}_{*q} = \overline{g}_{*q} : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ *para todo* $q \in \mathbb{Z}$*.*

Prova: Como $f \simeq g$, então, pela Proposição anterior, temos $\overline{f}_{\#q} \simeq \overline{g}_{\#q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Portanto, pela Proposição 8, $\overline{f}_{*q} = \overline{g}_{*q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. ■

Corolário 15. *Se* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *é uma equivalência homotópica, então* $\overline{f}_{*q} : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ *é isomorfismo para todo* $q \in \mathbb{Z}$*.*

Prova: Como f é uma equivalência homotópica, então existe $g : (Y, B) \to (X, A)$ tal que $f \circ g \simeq Id_{(Y,B)}$ e $g \circ f \simeq Id_{(X,A)}$. Assim, pelo Teorema anterior, $\overline{f}_{*q} \circ \overline{g}_{*q} = Id_{H_q(Y,B)}$ e $\overline{g}_{*q} \circ \overline{f}_{*q} = Id_{H_q(X,A)}$.

Portanto, temos que $\overline{f}_{*q}$ é sobrejetora e injetora, isto é, $\overline{f}_{*q}$ é um isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$. ■

Agradecimentos: Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. João Peres Vieira, pelo apoio e paciência oferecidos neste trabalho e ao auxílio financeiro da FAPESP.

Abstract: In this paper we will make a brief introduction about the Eilenberg–Steenrod Axioms and define homotopy pairs in order to show that the Singular Homology satisfies the Fifth Eilenberg–Steenrod Axiom (the Homotopy Axiom).

Keywords: Singular Homology; Homotopy; Eilenberg–Steenrod Axioms

Referências Bibliográficas

[1] Greenberg, M.J. "Lectures on Algebraic topology", A.W. Benjamim, New York, 1967

[2] Mac lane, S. "Homology", Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer, 1963

[3] Vick, J.W. "Homology Theory", Academic Press, New York-London, 1973

[4] Ruy, A. C. "Homologia Singular", Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

A Alternativa de Fredholm e Aplicações

Cristiano dos Santos[1]

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho desenvolveremos alguns resultados da Análise Funcional e faremos uma aplicação destes resultados na Teoria de Equações Integrais, utilizando a Alternativa de Fredholm.

Palavras-chave: Teorema Espectral, Equações Integrais, Alternativa Fredholm

1 Resultados Preliminares

Nesta seção, baseados na referência [1], apresentaremos alguns resultados desenvolvidos em nosso projeto de iniciação científica, que terão sua importância no desenvolvimento do trabalho. Não faremos as demonstrações dos Teoremas 2 e 4, porém suas provas podem ser encontradas em [1].

Definição 1. Sejam E e F espaços vetoriais normados, dizemos que a aplicação $k : E \to F$ linear é compacta ou completamente contínua se para todo $X \subset E$ limitado, $k(X)$ é relativamente compacto, isto é, $\overline{k(X)}$ é compacto.

O resultado a seguir sobre operadores compactos estabelece algumas equivalências que serão úteis na construção da teoria apresentada neste trabalho.

[1]Bolsista Fapesp, Processo: 2012/15162-3

Teorema 2. *Sejam E e F espaços normados e $k : E \to F$ uma aplicação linear; são equivalentes as seguintes propriedades:*

1 - k é compacta.

2 - Toda sequência limitada (x_n) de pontos de E contém uma subsequência (x_{r_n}) tal que a sequência $(k(x_{r_n}))$ é convergente em F.

3 - k leva a bola unitária B de E num conjunto relativamente compacto de F.

Definição 3. Dizemos que um operador linear A de um espaço pré-hilbertiano E é hermitiano ou autoadjunto (ou ainda simétrico no caso real) se para quaisquer $x, y \in E$ temos:

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle.$$

Teorema 4. *Seja A um operador hermitiano compacto definido no espaço pré-hilbertiano X, $A \neq 0$ então $\|A\|$ ou $-\|A\|$ é um autovalor de A.*

Teorema 5. *Sejam X um espaço pré-hilbertiano real ou complexo e A um operador hermitiano compacto definido em X, $A \neq 0$. Existe uma sequência $\lambda_n \in \mathbb{R}$ de autovalores não nulos de A e uma sequência e_n de autovetores correspondentes que formam um conjunto ortonormal tal que para todo elemento $x \in X$,*

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n, \ \text{onde } x_n = \langle x, e_n\rangle.$$

Temos $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$; a sequência contém todos os autovalores não nulos de A e se ela for infinita temos $|\lambda_n| \to 0$. Dado um particular $\lambda = \lambda_m$ a dimensão do autoespaço A_λ é finita e é igual ao número de vezes que o autovalor λ aparece na sequência λ_n.

Prova: Indiquemos por λ_1 e e_1 o autovalor e o autovetor unitário correspondente de A, cuja existência é garantida pelo Teorema 4. Vamos denotar $X = X_1$ e $A = A_1$ assim temos: $|\lambda_1| = \|A_1\|$ e $X_2 = \{e_1\}^\perp$ é um subespaço de X_1 invariante por A_1. A restrição A_2 de A_1 a X_2 é um operador hermitiano compacto e novamente pelo Teorema 4 existe um autovalor λ_2 e um autovetor correspondente e_2 de A_2 tal que $|\lambda_2| = \|A_2\|$ e observe que como $\|A_2\| \leq \|A_1\|$ então $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Repetindo este processo obtemos sucessivamente autovalores não nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A com $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$; autovetores correspondentes $e_1, \ldots, e_n$ formando um sistema ortonormal; subespaços $X_2, \ldots, X_{n+1}$ onde X_{i+1} indica o subespaço de X_i formado pelos vetores ortogonais a $e_1, \ldots, e_i$.

Consideremos duas situações que podem ocorrer, a saber A e B:

A. Se a restrição $A_{n+1} = A_{|X_{n+1}}$ for nula temos para todo $x \in X$

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \text{ onde } x_i = \langle x, e_i \rangle,$$

isto é, $A(X)$ é o subespaço de X gerado pelos vetores $e_1, \ldots, e_n$.

De fato, seja $\tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ então $\langle \tilde{x}, e_i \rangle = 0$. Logo, $\tilde{x} \in X_{n+1}$ e assim temos $A(\tilde{x}) = 0$ e portanto,

$$A(x) - \sum_{i=1}^{n} A(x_i e_i) = 0 \Longrightarrow A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i.$$

B. Se para todo natural n a restrição $A_{n+1} = A_{|X_{n+1}}$ for sempre não nula então o processo anterior nos dá uma sequência infinita λ_n de autovalores não nulos de A com $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots$ e um sistema ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formado pelos autovetores correspondentes. Neste caso, temos as seguintes conclusões:

(a) A sequência decrescente $|\lambda_n|$ tende a 0. De fato, caso contrário existiria um $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência $\frac{e_n}{\lambda_n}$ seria então limitada ($\|\frac{e_n}{\lambda_n}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$) sem que a sequência $A(\frac{e_n}{\lambda_n}) = e_n$ contenha uma subsequência convergente. Contrariando assim, o fato de que o operador A é compacto.

(b) Para todo $x \in X$ temos: $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$. De fato, basta demonstrar que dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe um inteiro m_0 tal que para $m \geq m_0$ vale: $\|A(x) - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n e_n\| < \varepsilon$. Seja $x^{(m+1)} = x - \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$ assim $x^{(m+1)} \in X_{m+1}$ pois, para $n \leq m$, $\langle x^{(m+1)}, e_n \rangle = 0$. Logo,

$$\left\| x^{(m+1)} + \sum_{n=1}^{m} x_n e_n \right\|^2 = \|x^{(m+1)}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\langle x^{(m+1)}, \sum_{n=1}^{m} x_n e_n \right\rangle + \sum_{n=1}^{m} |x_n|^2.$$

Assim, $\|x^{(m+1)}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |x_n|^2 \leq \|x\|^2$. De $\|A_{m+1}\| = |\lambda_{m+1}|$ segue

$$\|A(x^{(m+1)})\| = \|A_{m+1}(x^{(m+1)})\| \leq \|A_{m+1}\| \|x^{(m+1)}\| \leq |\lambda_{m+1}| \|x\|,$$

e como a sequência $|\lambda_n|$ tende monotonicamente para 0 basta tomar m_0 tal que $|\lambda_{m_0}| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$.

(c) Todo autovalor $\lambda \neq 0$ de A se encontra na sequência λ_n. De fato, pois caso contrário o autovetor correspondente e seria ortogonal a todos os e_n e de (b) seguiria que $A(e) = 0$ contra a hipótese de que $A(e) = \lambda e \neq 0$.

(d) Dado um autovalor $\lambda \neq 0$ que aparece p vezes na sequência λ_n então o autoespaço A_λ tem dimensão $\geq p$. Porém, não pode ter dimensão $> p$. De fato, pois caso contrário existiria um autovetor e correspondente a λ, ortogonal aos anteriores e a todos os e_n; e seguiria que $A(e) = 0$. ■

Teorema 6. *Sejam X um espaço pré-hilbertiano real ou complexo e A um operador hermitiano compacto definido em X, $A \neq 0$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \neq \lambda_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Então, o operador $\lambda I - A$ tem um inverso contínuo definido em X; indicando este inverso por $(\lambda I - A)^{-1}$*

então $x = (\lambda I - A)^{-1}(y)$ *é dado por:*

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n, \quad \textit{onde} \;\; y_n = \langle y, e_n \rangle. \tag{1.1}$$

Prova: Vamos construir a prova por etapas.

(A) Se a equação $\lambda x - A(x) = y$ tem uma solução x, esta é única e dada pela série em (1.1). De fato, do Teorema 5, $\lambda x - y = A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$. Efetuando o produto interno por e_m temos: $\lambda x_m - y_m = \lambda_m x_m$, isto é, $x_m = \frac{y_m}{\lambda - \lambda_m}$. E portanto,

$$\lambda x - y = \sum_{n=1} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n,$$

que equivale à (1.1).

(B) É imediato que se a série em (1.1) for convergente, o elemento x definido por ela satisfaz a equação: $(\lambda I - A)(x) = y$.

(C) A série em (1.1) satisfaz o Critério de Cauchy. De fato, sejam

$$\alpha = \sup_n \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right| \quad \text{e} \quad \beta = \sup_n \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right|$$

os quais existem pois $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ e $|\lambda_n| \to 0$. Se a sequência for finita o teorema é evidentemente verificado.

Sejam $v_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n$ e $u_m = A(v_m) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n$, assim temos:

$$\begin{aligned} \|u_{m+p} - u_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n \right\|^2 &\leq \sum_{n=m+1}^{m+p} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 |y_n|^2 \\ &\leq \alpha^2 \sum_{n=m+1}^{m+p} |y_n|^2. \end{aligned}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 \leq \|y\|^2$ satisfaz o critério de Cauchy pois é convergente. Assim, a série em (1.1) também.

(D) A série de (1.1) que define x é convergente. De

$$\|v_m\|^2 = \sum_{n=1}^{m} |\frac{y_n}{\lambda - \lambda_n}|^2 \leq \beta^2 \sum_{n=1}^{m} |y_n|^2 \leq \beta^2 \|y\|^2$$

vemos que a sequência v_m é limitada em X e A sendo compacto temos que existe uma subsequência v_{m_r} tal que $u_{m_r} = A(v_{m_r})$ seja convergente. Como mostramos em (C) que (u_m) é de Cauchy, segue que (u_m) é convergente e por consequência a série em (1.1).

(E) O operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínuo. De (1.1) segue,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}(y)\| = \left\| \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n \right\| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|y\| + \left|\frac{1}{\lambda}\right| \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}|^2 |y_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|y\| + \left|\frac{1}{\lambda}\right| \alpha \|y\|,$$

onde $\alpha = \sup_n \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right|$.

O que prova que o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínuo. ■

Teorema 7. *Com as notações dos teoremas anteriores. Dado um autovalor $\lambda \neq 0$ de A, uma condição necessária e suficiente para que a equação $\lambda x - A(x) = y$ tenha uma solução é que y seja ortogonal a todo autovetor de A associado a λ. As soluções x da equação acima são os elementos da forma:*

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n + z, \tag{1.2}$$

onde z é qualquer autovetor associado a λ.

Prova: Seja $\lambda x - A(x) = y$, então

$$\langle x, \lambda z - A(z) \rangle = \langle x, \lambda z \rangle - \langle x, A(z) \rangle = \langle \lambda x, z \rangle - \langle A(x), z \rangle$$

$$= \langle \lambda x - A(x), z \rangle = \langle y, z \rangle,$$

e portanto, para todo z tal que $A(z) = \lambda z$ temos $\langle y, z\rangle = 0$.

Como no Teorema 6, demonstra-se que x é da forma (1.2), bastando lembrar que $y_n = \langle y, e_n\rangle = 0$ se $\lambda_n = \lambda$ então $A(e_n) = \lambda e_n$.

Reciprocamente, se $\langle y, z\rangle = 0$ para todo z tal que $A(z) = \lambda z$, é imediato que todo elemento x da forma (1.2) é uma solução de $\lambda x - A(x) = y$. ■

Com os últimos teoremas podemos enunciar a **Alternativa de Fredholm**.

Sejam X um espaço pré-hilbertiano, A um operador hermitiano compacto definido em X e $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\lambda \neq 0$. Então vale a seguinte alternativa:

(i) Ou a equação $\lambda x - A(x) = y$ tem solução $\forall y \in X$. Então esta solução é única, dada por (1.1) e λ não é autovalor de A.

(ii) Ou a equação $\lambda x - A(x) = 0$ tem solução não trivial. Então o conjunto solução forma um espaço de dimensão finita e a equação $\lambda x - A(x) = y$ tem solução se, e só se, y for ortogonal a toda solução z da equação $\lambda z - A(z) = 0$; então as soluções x são dadas por (1.2) e λ é um autovalor de A.

2 Aplicações às Equações Integrais

Historicamente a primeira equação integral a ser estudada foi a equação de Abel do problema da tautócrona,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds, \quad \text{onde } 0 < \alpha < 1.$$

O problema da tautócrona consiste em saber qual a curva plana, ao longo da qual um corpo, sem velocidade inicial e sujeito somente à força da gravidade, desliza até ao ponto mais baixo da curva no mesmo período de tempo, independentemente do seu ponto de partida.

Outros exemplos de equações integrais:

1. A equação
$$y(t) = \int_a^b G(t,s)p(s)ds, \quad t \in [a,b]$$
que surge, por exemplo, no estudo da deflexão de uma barra.

2. A equação
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\mathrm{e}^{-2\pi its}ds$$
do problema da inversão de uma transformada de Fourier.

3. A equação
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$
cuja solução é a da equação diferencial $x' = f(t,x)$ com $x(t_0) = x_0$.

2.1 As Equações Integrais de Fredholm

Entre os tipos mais comuns de equações integrais mencionemos a equação de Fredholm de primeira espécie:

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

e a equação de Fredholm de segunda espécie:

$$y(t) = \lambda x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Nestes dois últimos exemplos x e y são elementos de um espaço de funções definidas no intervalo $[a,b]$ e o núcleo K está definido em $[a,b] \times [a,b]$. Quando o núcleo K não é uma função contínua diz-se que a equação integral tem núcleo singular. Diz-se que o núcleo K é degenerado se ele for da forma:

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)b_i(s).$$

Para estudarmos a existência e unicidade de solução da equação de Fredholm de segunda espécie vamos considerar

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

onde $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua com $|K(t,s)| \leq M$ para t,s em $[a,b]$; seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\frac{1}{\lambda}| < \frac{1}{M(b-a)}$. Mostremos que dado $y \in C([a,b],\mathbb{C})$, existe um e um só $x \in C([a,b],\mathbb{C})$ solução da equação integral.

De fato, $E = C([a,b],\mathbb{C})$ com a norma do sup é um espaço métrico completo, seja $T : x \in E \longmapsto T(x) \in E$ onde

$$T(x)(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Um ponto fixo de T é evidentemente solução do nosso problema e reciprocamente. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach é suficiente demonstrar que T é uma contração.

Dados $u, v \in E$ temos:

$$T(u)(t) - T(v)(t) = \frac{1}{\lambda}\int_a^b K(t,s)[u(s)-v(s)]ds,$$

e assim,

$$|T(u)(t)-T(v)(t)| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \int_a^b |K(t,s)||u(s)-v(s)|ds \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| M(b-a)\|u-v\|,$$

e portanto,

$$d(T(u),T(v)) \leq cd(u,v), \ \text{ onde, } \ c = \left|\frac{1}{\lambda}\right|(b-a)M < 1.$$

Vamos considerar agora a equação integral de Fredholm de segunda espécie:

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

com núcleo hermitiano, isto é, $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ e contínuo.

Consideremos o espaço pré-hilbertiano $E = C_{L_2}([a,b],\mathbb{C})$ das funções Lebesgue integráveis com a norma da integral, e mostremos que o operador:

$$k : x \in E \longmapsto k(x) \in E, \quad \text{onde} \quad k(x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

é compacto.

De fato, do Teorema 2 e do Teorema de Arzelá-Ascoli é suficiente demonstrar que:

i. $k(B)$ é equicontínuo.

ii. Para cada $t_0 \in [a,b]$ o conjunto $\{k(B)(t_0)\} = \{k(x)(t_0); x \in B\}$ é limitado em $\mathbb{C}$.

Demonstração de (i). Da continuidade uniforme de K segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in [a,b]$ e $t_1, t_2 \in [a,b]$ com $|t_1 - t_2| < \delta$ temos $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon$. Assim, dado $t_0 \in [a,b]$ arbitrário com $|t - t_0| < \delta$ e $x \in B$ obtemos

$$\begin{aligned}
|k(x)(t) - k(x)(t_0)| &\leq \int_a^b |K(t,s) - K(t_0,s)||x(s)|ds < \varepsilon \int_a^b |x(s)|ds \\
&\leq \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |x(s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

O que prova que $k(B)$ é equicontínuo, notando que a penúltima desigualdade segue da Desigualdade de Hölder.

Demonstração de (ii). Seja $t_0 \in [a,b]$, para todo $x \in B$ temos:

$$|k(x)(t_0)| \leq \int_a^b |K(t_0,s)||x(s)|ds \leq M,$$

onde M é uma constante que pode depender de t_0.

Mostremos agora que k é hermitiano, seu adjunto k^* é definido por:

$$k^*(x)(t) = \int_a^b K^*(t,s)x(s)ds, \quad \text{onde} \quad K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\langle k(x), y\rangle &= \int_a^b \int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}ds\,dt = \int_a^b x(s)\overline{\left[\int_a^b \overline{K(t,s)}y(t)dt\right]}ds \\ &= \int_a^b x(s)\overline{\left[\int_a^b K^*(s,t)y(t)dt\right]}ds = \langle x, k^*(y)\rangle.\end{aligned}$$

Assim, como K é hermitiano segue que k também é.

Indiquemos por λ_n a sequência de autovalores não nulos de k e por e_n o sistema ortonormal correspondente de autofunções, cuja existência foi demonstrada no Teorema 5. Temos pois,

$$k(e_n) = \lambda_n e_n, \quad \text{isto é}, \quad \int_a^b K(t,s)e_n(s)ds = \lambda_n e_n(t), \quad t \in [a,b]. \tag{1.3}$$

Teorema 8. *Temos:*

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds\,dt.$$

Prova: Para todo $t \in [a,b]$, da desigualdade de Bessel aplicada à função

$$s \in [a,b] \longmapsto K(t,s) \in \mathbb{C}$$

e ao sistema ortonormal de funções e_n, segue que

$$\sum_n \left|\int_a^b K(t,s)e_n(s)ds\right|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2 ds.$$

De (1.3) obtemos

$$\sum_n \lambda_n^2 |e_n(t)|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2 ds, \tag{1.4}$$

e assim

$$\sum_n \lambda_n^2 \int_a^b |e_n(t)|^2 dt \leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds\, dt,$$

isto é,

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds\, dt.$$

■

Teorema 9. *Para todo $x \in C([a,b],\mathbb{C})$ temos*

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \sum_n \lambda_n x_n e_n(t),$$

esta série sendo uniformemente e absolutamente convergente em $[a,b]$.

Prova: Do Teorema 5 segue que para toda função $x \in C_{L_2}([a,b],\mathbb{C})$ temos:

$$y = k(x) = \sum_n \lambda_n x_n e_n, \quad \text{onde} \quad x_n = \langle x, e_n \rangle = \int_a^b x(s)\overline{e_n(s)}ds,$$

isto é,

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \sum_n \lambda_n x_n e_n(t) \quad t \in [a,b]. \tag{1.5}$$

onde a série é convergente em $E = C_{L_2}([a,b],\mathbb{C})$.

Para todo $x \in C([a,b],\mathbb{C})$ a série em (1.5) é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$. De fato, aplicando primeiro a desigualdade de Cauchy-Schwarz e depois a desigualdade de Bessel e (1.4) temos:

$$\begin{aligned}\left|\sum_n \lambda_n x_n e_n(t)\right| &= |\langle \lambda_n e_n(t), x_n \rangle| \leq \left[\sum_n |x_n|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_n |\lambda_n e_n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_a^b |K(t,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} M \|x\|_2,\end{aligned}$$

onde $M = \sup_{a \leq s,t \leq b} |K(t,s)|$. ■

Teorema 10. *Seja* $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *um núcleo hermitiano contínuo, seja* λ_n *a sequência de seus autovalores não nulos e* e_n *a sequência ortonormal das autofunções correspondentes. Para todo* $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ *a equação integral:*

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

tem uma e só uma solução dada por:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda}\sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t),$$

onde a série é absolutamente e uniformemente convergente em $[a,b]$.

Prova: O Teorema 6 nos assegura que dado $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n, dado $y \in C_{L_2}([a,b],\mathbb{C})$ a equação integral de Fredholm de segunda espécie, isto é, $y = (\lambda I - k)(x)$, tem uma e só uma solução

$$x = (\lambda I - k)^{-1}(y) \in C_{L_2}([a,b],\mathbb{C})$$

dada por:

$$x = \frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda}\sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n,$$

onde $y_n = \langle y, e_n \rangle = \int_a^b y(s)\overline{e_n(s)}ds$, isto é,

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda}\sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t), \quad t \in [a,b], \tag{1.6}$$

onde a série é convergente em $C_{L_2}([a,b],\mathbb{C})$. Para todo $y \in C([a,b],\mathbb{C})$ a série em (1.6) é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$.

De fato, x satisfaz a relação:

$$x = \frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda}k(x)$$

que comparada com (1.6) nos mostra que:

$$k(x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t),$$

e do Teorema 9 segue que esta série é absolutamente e uniformemente convergente. ■

Teorema 11. *Dados um núcleo hermitiano K e um autovalor $\lambda \neq 0$ do operador hermitiano compacto k associado a K, então equação integral,*

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

tem solução se, e só se, $\int_a^b y(t)\overline{z(t)}dt = 0$ para toda função $z \in C([a,b],\mathbb{C})$ tal que:

$$\int_a^b K(t,s)z(s)ds = \lambda z(t). \tag{1.7}$$

As soluções são da forma:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t) + z(t) \tag{1.8}$$

onde z é um elemento de $C([a,b],\mathbb{C})$ que satisfaz (1.7) e

$$y_n = \int_a^b y(s)\overline{e_n(s)}ds.$$

A série em (1.8) é absolutamente e uniformemente convergente.

Prova: A demonstração segue do Teorema 7 de forma análoga ao Teorema anterior. ■

Para desenvolver os próximos teoremas necessitaremos dos seguintes resultados:

Teorema 12 (Teorema de Dini). *Sejam X um espaço compacto e $f_n \in C(X,\mathbb{R})$ uma sequência crescente ou decrescente de funções contínuas que converge para uma função contínua f, então esta convergência é uniforme.*

Corolário 13. *Sejam X um espaço compacto e*

$$\sum_n h_n(x) = h(x)$$

uma série convergente de funções contínuas positivas h_n tal que h também seja contínua, então a série é uniformemente convergente.

Teorema 14. *A série*

$$\sum_n \lambda_n^2 |e_n(t)|^2$$

é absolutamente convergente em $[a,b]$.

Prova: Seja

$$K_2(t,s) = \int_a^b K(t,u)K(u,s)du.$$

Para cada $s \in [a,b]$ fixado apliquemos o Teorema 9 a $K_2(t,s)$ considerado como função de $t \in [a,b]$:

$$\int_a^b K(t,u)K(u,s)du = \sum_n \lambda_n \left[\int_a^b K(u,s)\overline{e_n(u)}du\right] e_n(t) =$$
$$= \sum_n \lambda_n \overline{\left[\int_a^b K(s,u)e_n(u)du\right]} e_n(t) = \sum_n \lambda_n^2 e_n(t)\overline{e_n(s)}$$

esta série sendo absolutamente e uniformemente convergente para $t \in [a,b]$ e s fixado. Temos em particular

$$K_2(s,s) = \sum_n \lambda_n^2 |e_n(t)|^2$$

e K_2 sendo contínua segue-se do Teorema de Dini que esta série é uniformemente convergente em $[a,b]$. ∎

Teorema 15. *Nas condições do Teorema 10 a solução x de $y = (\lambda I - k)(x)$ ainda pode ser expressa como:*

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b R(t,s,\lambda)y(s)ds,$$

onde

$$R(t,s,\lambda) = \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda - \lambda_n} e_n(t)\overline{e_n(s)} - K(t,s),$$

esta série sendo absolutamente e uniformemente convergente em $[a,b] \times [a,b]$.

Prova: Substituindo, $\frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda-\lambda_n)}$ por $\frac{\lambda_n^2}{\lambda^2(\lambda-\lambda_n)} - \frac{\lambda_n}{\lambda^2}$ em (1.6) temos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\lambda}y(t) + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2(\lambda-\lambda_n)} y_n e_n(t) - \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda^2} y_n e_n(t) \\
&= \frac{1}{\lambda}y(t) + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2(\lambda-\lambda_n)} y_n e_n(t) - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b K(t,s)y(s)ds \\
&= \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\sum_n \frac{\lambda_n^2}{(\lambda-\lambda_n)} e_n(t)\int_a^b y(s)\overline{e_n(s)}ds - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b K(t,s)y(s)ds \\
&= \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \left[\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda-\lambda_n} e_n(t)\overline{e_n(s)} - K(t,s)\right] y(s)ds \\
&= \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b R(t,s,\lambda)y(s)ds.
\end{aligned}$$

Da hipótese sobre λ segue que existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda - \lambda_n| \geq \delta$ e assim temos:

$$\left|\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n - \lambda} e_n(t)\overline{e_n(s)}\right| \leq \frac{1}{\delta}\sum_n |\lambda_n^2 e_n(t)\overline{e_n(s)}|$$

e da Desigualdade de Cauchy–Schwarz temos:

$$\left|\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n - \lambda} e_n(t)\overline{e_n(s)}\right| \leq \frac{1}{\delta}\left[\sum_n \lambda_n^2 |e_n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_n \lambda_n^2 |e_n(s)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e assim, do Teorema 14 segue que a série que define R é absolutamente e uniformemente convergente. ■

Agradecimentos: Agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pelo apoio e supervisão do trabalho e a Fapesp pelo apoio financeiro.

Abstract: In this work we will develop some results of Functional Analysis and we will apply these results in the Theory of Integral Equations, using the Fredholm Alternative.

Keywords: Spectral Theorem, Integral Equations, Fredholm Aternative.

Referências Bibliográficas

[1] Hönig, C.S., *Análise Funcional e Aplicações*, vols. 1,2. IME–USP, 1960.

[2] Kreysig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library, 1989.

Sistemas Impulsivos Autônomos e Aplicação

Fernanda Andrade da Silva[1]
Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho faremos uma introdução às equações diferenciais impulsivas, ou seja, ao estudo dos efeitos impulsivos sobre a dinâmica definida por certas equações diferenciais, com foco nas equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chave: equações diferenciais; impulsos; sistemas autônomos.

1 Introdução

As equações diferencias impulsivas (EDI) são usadas para descrever processos de evolução que sofrem variações de estado cuja a duração é tão curta que podem ser consideradas instantâneas. Para fazer tal descrição deve-se valer das equações diferenciais para descrever os estágios contínuos do processo e de uma condição para descrever as descontinuidades de primeira espécie da solução ou de suas derivadas no instante de impulso.

Existem muitas situações que levam em consideração os impulsivos. Na pecuária, por exemplo, o manejo de um rebanho bovino envolve de quando em quando a retirada de um certo número de cabeças para o abate, esta situação, em comparação ao processo todo pode ser considerado um impulso no número de indivíduos desta população.

Outra situação interessante, a qual descreveremos neste trabalho, é o estudo de como uma aplicação de um medicamento injetável representa um impulso na concentração de certa substância no sangue de um paciente.

[1] Bolsista PET

2 Fatos Básicos de EDO

Nesta seção vamos descrever alguns resultados sobre as equações diferenciais ordinárias (EDO) que serão utilizados na seção seguinte.

Definição 1. Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}^n$, sendo $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto, uma **Equação Diferencial Ordinária** é denotada por $\dot{x} = f(t, x(t))$, onde $\dot{x} = dx/dt$, ou abreviadamente,

$$\dot{x} = f(t, x).$$

No caso em que f não depende explicitamente de t a equação diferencial ordinária é chamada **autônoma**, neste caso $\dot{x} = f(x)$.

Uma **solução** da equação diferencial ordinária acima é uma função diferenciável x definida num intervalo I de modo que, para todo $t \in I$, se tem $(t, x(t)) \in D$ e $\dot{x} = f(t, x(t))$. A função f é chamada de **campo vetorial**.

Dado $(t_0, x_0) \in D$, consideramos também o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Uma solução do problema inicial (1.1)–(1.2) é uma solução x de (1.1) definida num intervalo I de modo que $t_0 \in I$ e a condição (1.2) está satisfeita. Se f é contínua, decorre imediatamente do Teorema Fundamental do Cálculo que resolver o problema de valor inicial (1.1)–(1.2) é equivalente a resolver a equação integral abaixo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \; t \in I.$$

Teorema 2. *Se $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é aberto, $f : D \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $(t_0, x_0) \in D$, então existe pelo menos uma solução $x \in C^1$ do problema de valor inicial* (1.1)–(1.2) *definida num intervalo* (a, b).

Teorema 3. *Sob as hipóteses do Teorema 2, se $f \in C^1$, então existe uma única solução $x = x(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ do problema de valor inicial* (1.1)–(1.2) *definida num intervalo (a, b), contendo t_0.*

As provas destes resultados podem ser encontradas em [1].

Definição 4. Seja x uma solução de (1.1), com $f \in C^1$, definida num intervalo I. Diz-se que y é uma continuação, ou prolongamento, de x se for uma solução de (1.1) definida num intervalo J que contém propriamente I e coincidir com x em I. Diz-se que a solução de x de (1.1) definida num intervalo I é não continuável se ela não possuir continuação. Neste caso o intervalo I é chamado intervalo máximo de existência da solução x.

Analogamente, definem-se as continuações à esquerda ou à direita de uma solução de (1.1), bem como soluções não continuáveis à esquerda ou à direita e intervalos máximos de existência à esquerda ou à direita dessas soluções.

Teorema 5. *Sejam $f \in C^1$ e x uma solução de* (1.1). *Então ou x é não continuável ou existe uma única continuação de x a um intervalo máximo de existência (α, ω). Além disso, $(t, x(t)) \to \partial D$ com $t \to \alpha$ ou $t \to \omega$, onde ∂D denota a fronteira do aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

No enunciado do Teorema 5, a fronteira ∂D do conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é entendida num sentido generalizado, ou seja, para todo conjunto compacto $K \subset D$, se $(\bar{t}, x(\bar{t})) \in K$ para algum $\bar{t} \in (\alpha, \omega)$, então existem $t_1 < \bar{t} < t_2$ de modo que $(t, x(t)) \notin K$ para $t < t_1$ ou $t > t_2$, respectivamente.

Consequentemente, sob as hipóteses do Teorema 5 com $D = \mathbb{R}^{n+1}$, se uma solução x de (1.1) satisfaz $|x(t)| < \gamma(t)$, em seu intervalo máximo de existência (α, ω), onde $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $(\alpha, \omega) = (-\infty, \infty)$. Também, se o conjunto D é não limitado e $|(t, x(t))| \to \infty$ com $t \to \alpha$ ou $t \to \omega$, entende-se que $(t, x(t)) \to \partial D$.

Os conceitos de solução não continuável e intervalo máximo de existência são estendidos ao contexto em que o campo vetorial f é apenas contínuo, portanto não é garantida a unicidade dos problemas de valor inicial associados a (1.1). Neste caso temos **intervalo maximal** de existência, em vez de intervalo máximo.

3 Sistemas Impulsivos Autônomos

No estudo dos sistemas de equações diferenciais impulsivas tem-se o caso em que a função f não depende explicitamente de t, assim como os impulsos, que será tratado a partir desta seção.

Definição 6. Dadas as funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e $F : M \to \mathbb{R}^n$ onde $M \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado. O par (f, F) define um **Sistema Impulsivo Autônomo** representado por

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \text{se } x(t) \notin M, \tag{1.3}$$

$$x(t) \in M \Rightarrow x(t^+) = F(x(t)), \tag{1.4}$$

ao qual podemos agregar a condição inicial

$$x(0) = a, \tag{1.5}$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$ é dado. O problema constituído pelo sistema impulsivo autônomo (1.3)–(1.4)) mais a condição inicial (1.5), será referido como problema de valor inicial impulsivo (1.3)–(1.5).

Definição 7. Diz-se que $\phi : [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$, $0 < \tau \leq \infty$, é uma solução do problema de valor inicial impulsivo (1.3)–(1.5) se valem as seguintes condições:

(1) ϕ é contínua à esquerda e $\phi(0) = a$.

(2) ϕ é de classe C^1 e satisfaz a equação (1.3), para todo $t \in [0, \tau)$, em algum intervalo $(t, t + \epsilon_t)$, $\epsilon_t > 0$.

(3) Para todo $t \in [0, \tau)$, se $\phi(t) \notin M$, então $\phi(t^+) = \phi(t)$; se $\phi(t) \in M$, então $\phi(t^+) = F(\phi(t))$.

Priorizamos a variação de t no sentido crescente. Estaremos pois considerando semi-órbitas de (1.3)–(1.5) em vez de órbitas, embora continuemos a utilizar este termo por comodidade.

Observação 8. A existência e unicidade de solução do problema (1.3)–(1.5) é consequência dos Teoremas 2 e 3 apresentados na seção anterior.

Exemplo 9. Considere $f(x_1, x_2) = (-1, 0)$, definimos a equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= -1, \\ \dot{x_2}(t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sejam

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\} \quad \text{e} \quad F(x_1, x_2) = (x_1, x_2/2).$$

Consideremos a condição de impulso

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in M \Rightarrow x(t^+) = f(x(t)). \tag{1.7}$$

Se $a = (1, 1) \in M$, a solução $\phi(t; a) = (\phi_1(t; a), \phi_2(t; a))$ no intervalo $[0, 1)$ sofre impulsos em $t = 0, 1 - (1/2), 1 - (1/2^2), \ldots, 1 - (1/2^n), \ldots$ e é dada por:

$$\phi(t; a) = \begin{cases} (1 - t, 1/2), & \text{se } t \in (0, 1/2], \\ (1 - t, 1/4), & \text{se } t \in (1/2, 3/4], \\ (1 - t, 1/8), & \text{se } t \in (3/4, 7/8], \end{cases}$$

e assim por diante.

Ela pode ser *prolongada* ao intervalo $[0, \infty)$ pondo $\phi(t; a) = (1 - t, 0)$ para $t \in [1, \infty)$. Sua órbita é representada na Figura 1.1.

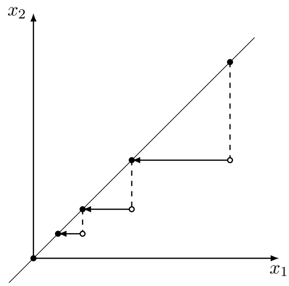


Figura 1.1: Órbita do Exemplo 9

Se a condição inicial for $a = (a_1, a_2)$, com $a_2 < 0$, o intervalo máximo de existência à direita de $\phi(t; a)$ é $[0, \infty)$ e a solução $\phi(t; a)$ pode sofrer no máximo um impulso. A função $\phi(t) = (-t, 0)$ é uma solução do sistema impulsivo (1.6)–(1.7), definida em $(-\infty, \infty)$, que não sofre impulsos, com a condição inicial $(0, 0)$.

4 Aplicação

Consideremos uma situação de pesquisa em que se estuda a utilização de um medicamento novo, onde o objetivo é determinar uma prescrição eficiente, estabelecendo o período e o tamanho das doses. Não conhecendo inicialmente um horário para a ingestão da droga, decidimos que as doses sejam tomadas quando um monitoramento indicar que sua concentração no sangue do paciente tenha atingido um nível mínimo recomendado.

A droga é introduzida no organismo pelo aparelho digestivo, é então absorvida pelo aparelho circulatório e, finalmente, eliminada. Num instante t, indicamos com $x(t)$ e $y(t)$ as quantidades de droga nos aparelhos digestivo e circulatório, respectivamente. Se k_1 é a taxa de absorção da droga pela corrente sanguínea e k_2 é a taxa de eliminação pelos rins, a dinâmica da distribuição da droga no corpo humano é descrita pelo sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_1 x, \\ \dot{y} &= k_1 x - k_2 y. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Vamos nos fixar no caso $k_1 \neq k_2$. Supostamente o organismo é livre da droga nos aparelhos digestivo e circulatório quando do início do tratamento, que começa com uma dose d_0. Ou seja, a condição inicial é dada por:

$$(x(0), y(0)) = (d_0, 0). \tag{1.9}$$

A solução do problema de valor inicial (1.8)–(1.9) é

$$(x(t), y(t)) = d_0\big(\mathrm{e}^{-k_1 t}, \frac{k_1}{k_2 - k_1}(\mathrm{e}^{-k_1 t} - \mathrm{e}^{-k_2 t})\big).$$

De fato, podemos escrever da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{Z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{Z}.$$

Note que os autovalores de A são $\lambda_1 = -k_1$ e $\lambda_2 = -k_2$. Vamos agora determinar os autovetores.

Para $\lambda_1 = -k_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 + k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k_1 \alpha + (-k_2 + k_1)\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{k_1}{-k_1 + k_2}\alpha,$$

logo um autovetor é

$$v_1 = \left(1, \frac{k_1}{-k_1 + k_2}\right).$$

Para $\lambda_2 = -k_2$

$$\begin{bmatrix} -k_1 + k_2 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} (-k_1+k_2)\alpha = 0, \\ k_1\alpha = 0, \end{cases}$$

assim tomamos

$$v_2 = (0,1).$$

A solução geral de (1.8) é dada por:

$$(x(t), y(t)) = c_1 v_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

Substituindo v_1, v_2 e $x(0) = d_0, y(0) = 0$ na expressão acima, obtemos

$$c_1 = d_0, \qquad\qquad c_2 = -d_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1}.$$

Portanto

$$(x(t), y(t)) = d_0\Big(1, \frac{k_1}{k_2-k_1}\Big)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - d_0 \frac{k_1}{k_2-k_1}(0,1)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

é a solução de (1.8)–(1.9).

Analisaremos o sinal de $x(t)$ e de $y(t)$.

Claramente $x(t)$ é positiva. Como $k_1 \neq k_2$ temos dois casos.

Primeiro caso: $k_2 < k_1$, assim para $t > 0$

$$-k_2 t > -k_1 t \Rightarrow \mathrm{e}^{-k_2 t} > \mathrm{e}^{-k_1 t},$$

então $\dfrac{k_1}{k_2-k_1} < 0$ e $\mathrm{e}^{-k_1 t} - \mathrm{e}^{-k_2 t} < 0$, segue que $y(t) > 0$, para $t > 0$.

Segundo caso: $k_2 > k_1$, assim para $t > 0$

$$-k_2 t < -k_1 t \Rightarrow \mathrm{e}^{-k_2 t} < \mathrm{e}^{-k_1 t},$$

então $\dfrac{k_1}{k_2-k_1} > 0$ e $\mathrm{e}^{-k_1 t} - \mathrm{e}^{-k_2 t} > 0$, segue que $y(t) > 0$, para $t > 0$.

Logo $x(t), y(t) > 0$, para $0 < t < \infty$ e $(x(t), y(t)) \to (0,0)$, quando $t \to \infty$.

De acordo com (1.8), $\dot{y}(0) > 0$, então existe um ponto de máximo de y, no instante $\bar{t} = \dfrac{\ln k_1 - \ln k_2}{k_1 - k_2}$, o qual é único. O valor de máximo é

$$y(\bar{t}) = d_0 \mathrm{e}^{-k_2 \bar{t}}. \tag{1.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\dot{y}(\bar{t}) = 0 \Rightarrow k_1 \mathrm{e}^{-k_1 \bar{t}} - \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1}\big(\mathrm{e}^{-k_1 \bar{t}} - \mathrm{e}^{-k_2 \bar{t}}\big) &= 0 \\
\Rightarrow \Big[1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1}\big(1 - \mathrm{e}^{(k_1 - k_2)\bar{t}}\big)\Big] &= 0 \\
\Rightarrow 1 - \mathrm{e}^{(k_1 - k_2)\bar{t}} &= \frac{k_2 - k_1}{k_2} \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{(k_1 - k_2)\bar{t}} &= \frac{k_1}{k_2}.
\end{aligned}$$

Aplicando o ln, obtemos

$$(k_1 - k_2)\bar{t} = \ln\Big(\frac{k_1}{k_2}\Big),$$

ou seja,

$$\bar{t} = \frac{\ln k_1 - \ln k_2}{k_1 - k_2}.$$

Se um tratamento prescreve uma dose d a cada momento em que a quantidade de droga no sangue decai a um nível $m > 0$, a dinâmica da distribuição da droga no organismo é descrita pelo sistema impulsivo autônomo dado pelo problema de valor inicial (1.8)–(1.9) acrescido da condição de impulso

$$y(t) = m,\, t > \bar{t} \Rightarrow x(t^+) = x(t) + d. \tag{1.11}$$

Resumidamente, a situação é descrita pelo seguinte problema impulsivo de valor inicial:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -k_1 x, \\
\dot{y} &= k_1 x - k_2 y, \\
y(t) = m,\, t > \bar{t} \Rightarrow x(t^+) &= x(t) + d, \\
(x(0), y(0)) &= (d_0, 0).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Para que a solução $\phi(t;a) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$, $a = (d_0, 0)$, do problema (1.12) sofra um primeiro impulso em $t = t_1$, basta que $d_0 > 0$ seja suficientemente grande de modo que $y(\bar{t}) > m$, de acordo com (1.10). Para que haja impulsos subsequentes em $t_2 < t_3 \cdots$ é suficiente que a dose d satisfaça $d > k_2 m/k_1$, note que $y(t) > 0$, então $k_1 x(t_1) - k_2 m > 0$, basta tomar $d = x(t_1)$. Esta condição sobre d combinada com (1.8) garante que existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi(t,a) > 0$ para $t_1 < t < t_1 + \epsilon$.

Na Figura 1.2 é representada a órbita da solução $\phi(t,a)$ do problema (1.12). Ela cruza a reta $y = m$ no ponto $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$, $0 < t_0 < \bar{t}$, sem sofrer impulso. O primeiro impulso ocorre no primeiro instante $t_1 > \bar{t}$ em que a solução $(x(t), y(t))$ de (1.8)–(1.9) satisfaz $y(t_1) = m$. O segundo impulso ocorre no primeiro instante $t_2 = t_1 + \tau$ de modo que $\tau > 0$ é o primeiro instante em que a solução de (1.8) com $(x(0), y(0)) = (x(t_1) + d, m)$ satisfaz $y(\tau) = m$ e assim por diante.

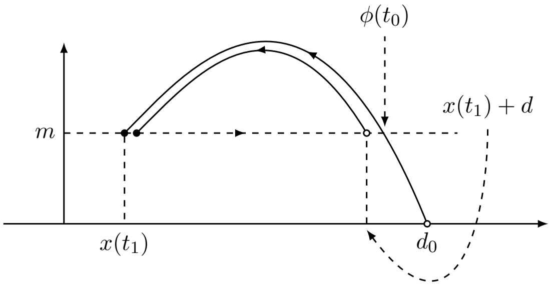


Figura 1.2: Órbita da solução $\phi(t,a)$ do problema (1.12)

Observe que se escolhermos $d = x(t_0) - x(t_1)$, a correspondente órbita será periódica de período $\omega = t_1 - t_0$. Assim, uma prescrição para o tratamento em questão pode ser com uma tal dose em períodos de tempo ω.

Abstract: In this paper we will introduce the impulsive differential equations, in other words, the study of impulsive effects on the dynamics defined by certain differential equations, focusing on ordinary differential equations.

Keywords: differential equations, impulses, autonomous systems

Referências Bibliográficas

[1] Hale, J.K., *Ordinary Differential Equations*, 2.ed. New York: Huntington, 1980.

[2] Lakshmikantan, V.; Bainov, D.D.; Siemonov, P.S., *Theory of Impulsive Differential Equations*, Singapore: World Scientific, 1989.

[3] Viegas, T.R., *A influência de uma ação impulsiva no comportamento de soluções de equações diferenciais*, Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação–Mestrado Profissional em Matemática Universitária, 2011.

[4] Gadotti, M.C.; Nicola, S.H.J., *Sistemas Impulsivos Autônomos*, Notas da Bienal, Unicamp, Campinas, 2012.

Teorema de Existência de Solução para EDFR

Márcia Ritchielle da Silva

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho apresentamos alguns resultados preliminares sobre as Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento (EDFR) e em seguida o Teorema de Existência de Solução para as EDFR, com base na referência [1].

Palavras-chave: Retardo; Existência; Solução

1 Introdução

Apresentaremos neste trabalho um breve estudo sobre as Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento (EDFR), estas englobam as equações diferenciais com retardamento e são de grande importância para descrever fenômenos que levam em conta informações do passado, como por exemplo, o tempo de gestação no modelo da dinâmica populacional, tempo de incubação no tratamento de doenças, problemas econômicos, entre outros, no qual há um retardo temporal entre causa e efeito.

Serão abordados alguns conceitos básicos para introduzirmos uma EDFR e em seguida demonstraremos o teorema central deste trabalho.

2 Definições

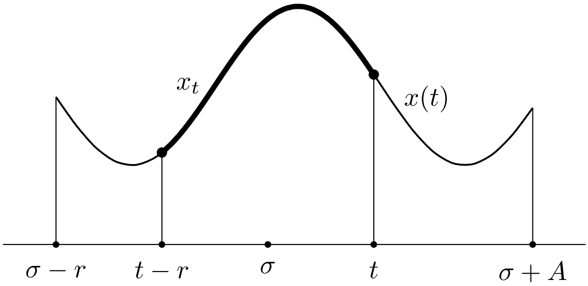
Definição 1. Sejam $r > 0$ e

$$C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n) = \{\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n \text{ contínua}\}$$

o espaço de Banach das funções contínuas definidas em $[-r, 0]$ tomando valores em $\mathbb{R}^n$ com a topologia da convergência uniforme. Designamos a norma de um elemento $\phi \in C$ como $\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$.

Definição 2. Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, então para todo $t \in [\sigma, \sigma + A]$, definimos $x_t \in C$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

A figura abaixo ilustra x_t:



Definição 3. Se D é um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada, então dizemos que a relação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

é **uma equação diferencial funcional com retardamento**. Desejamos enfatizar esta equação definida por f escrevendo EDFR(f).

Definição 4. Uma função x é uma solução da equação (1.1), se existirem $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ tais que $x \in C([\sigma - r, \sigma + A), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz (1.1) para $t \in [\sigma, \sigma + A)$.

Para $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ denotaremos $x(\sigma, \phi, f)$ como sendo a solução da equação (1.1) para $t \in [\sigma - r, \sigma + A)$ com função inicial ϕ em σ, ou seja, $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$.

3 Alguns Resultados

Nesta seção enunciaremos alguns lemas necessários para a construção do teorema principal, as provas podem ser encontradas em [1].

Lema 5. *Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ são dados e $f(t,\phi)$ é contínua, então encontrar uma solução para a equação* (1.1) *em* (σ,ϕ) *é equivalente a resolver a equação integral:*

$$x_\sigma = \phi \quad e \quad x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds, \ t \geq \sigma.$$

Para provar a existência de solução é conveniente introduzirmos uma função $\widetilde{\phi}$ e uma equação integral associada a ela.

Para qualquer $(\sigma,\phi) \in \mathbb{R} \times C$, considere a função $\widetilde{\phi} \in C([\sigma - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ definida por:

$$\widetilde{\phi}_\sigma = \phi, \quad \widetilde{\phi}(t+\sigma) = \phi(0), \ t \geq 0.$$

Suponha que x é uma solução da equação (1.1) passando por (σ,ϕ) e que

$$x(t+\sigma) = \widetilde{\phi}(t+\sigma) + y(t), \tag{1.2}$$

para $t \geq -r$. Assim, do Lema 5 temos que y satisfaz

$$y(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \widetilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, \ t \geq 0. \tag{1.3}$$

Reciprocamente, se y é uma solução de (1.3), então é possível obter uma solução x da equação (1.1) por (1.2). Portanto, encontrar uma solução para a equação (1.1) é equivalente a encontrar $\alpha > 0$ e uma função $y \in C([-r,\alpha], \mathbb{R}^n)$ tal que a equação (1.3) esteja satisfeita para $0 \leq t \leq \alpha$.

Se V é um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, denotaremos $C(V, \mathbb{R}^n)$ como sendo a classe de todas as funções $f : V \to \mathbb{R}^n$ que são contínuas e $C^0(V, \mathbb{R}^n) \subseteq C(V, \mathbb{R}^n)$ o subconjunto de funções limitadas contínuas de V para $\mathbb{R}^n$. O espaço $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ é Banach com a norma

$$|f|_V = \sup_{(t,\phi) \in V} |f(t,\phi)|.$$

Definição 6. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definimos:

$$I_\alpha = [0, \alpha], \quad B_\beta = \{\psi \in C; \|\psi\| \leq \beta\},$$

$$A(\alpha, \beta) = \{y \in C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n); y_0 = 0, y_t \in B_\beta, t \in I_\alpha\}.$$

Lema 7. *Suponha $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $W \subseteq \Omega$ compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de W tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existem $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ uma vizinhança de f^0 e constantes positivas M, α e β tais que $|f(\sigma, \phi)| < M$ para $(\sigma, \phi) \in V$ e $f \in U$.*

Também, para todo $(\sigma^0, \phi^0) \in W$, temos $(\sigma^0 + t, \widetilde{\phi}_{\sigma^0 + t} + y_t) \in V$, para $t \in I_\alpha$ e $y \in A(\alpha, \beta)$.

Lema 8. *Suponha que $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ é um conjunto aberto, $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é dada. Considere também as vizinhanças U e V e as constantes M, α, β que foram obtidas no Lema 7.*

Se $T : W \times U \times A(\alpha, \beta) \to C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ definida por

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r, 0], \\ \displaystyle\int_0^t f(\sigma + s, \widetilde{\phi}_{\sigma + s} + y_s) ds, & t \in I_\alpha. \end{cases}$$

Então T é contínua e existe um conjunto compacto $K \subset C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tal que $T : W \times U \times A(\alpha, \beta) \to K$.

Também, se $M\alpha \leq \beta$, então $T : W \times U \times A(\alpha, \beta) \to A(\alpha, \beta)$.

4 Existência de Solução

O Teorema de Existência de Solução que demonstraremos adiante é uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Definição 9. Sejam U um subconjunto de um espaço de Banach X e T uma aplicação de U em X. Então T é **completamente contínua** se T

é contínua e para qualquer conjunto limitado $B \subseteq U$, o fecho de $T(B)$ é compacto.

Teorema 10 (Ponto Fixo de Schauder). *Se U um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach X e $T : U \to U$ é completamente contínua, então T tem um ponto fixo em U.*

Teorema 11 (Existência de Solução). *Suponha $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ um conjunto aberto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução da EDFR(f^0) passando por (σ, ϕ). Mais ainda, se $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de W tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existe uma vizinhança $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 e existe $\alpha > 0$ tais que para qualquer $(\sigma, \phi) \in W$, $f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \phi, f)$ da EDFR(f) passando por (σ, ϕ) em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.*

Prova: Para mostrar que existe solução da EDFR passando por (σ, ϕ), consideremos $W = \{(\sigma, \phi)\}$. Logo, W é compacto. Assim, pelo Lema 8, podemos definir a aplicação $T : W \times U \times A(\alpha, \beta) \to C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ contínua.

Consideremos a aplicação $T((\sigma, \phi), f^0, \cdot) : A(\alpha, \beta) \to C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ definida por:

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r, 0], \\ \displaystyle\int_0^t f(\sigma + s, \widetilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, & t \in I_\alpha. \end{cases}$$

Mostremos que estamos sob as condições do Teorema 10. Ou seja, mostremos que $A(\alpha, \beta)$ é fechado, limitado e convexo em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ e que a aplicação $T : A(\alpha, \beta) \to A(\alpha, \beta)$ é completamente contínua, lembrando pelo Lema 8 que podemos escolher as constantes M, α e β de forma que $M\alpha \leq \beta$.

Afirmação 1: $A(\alpha, \beta) = \{y \in C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n); y_0 = 0, y_t \in B_\beta, t \in I_\alpha\}$ é um conjunto limitado.

De fato, seja $y \in A(\alpha, \beta)$ arbitrário. Então tem-se

$$y_t \in B_\beta, \forall t \in I_\alpha \Rightarrow \|y_t\| \leq \beta, \forall t \in I_\alpha$$

e assim $\forall \theta \in [-r, 0]$, $|y(t+\theta)| \leq \beta \Rightarrow \|y\| \leq \beta$. Portanto, $A(\alpha, \beta)$ é limitado.

Afirmação 2: $A(\alpha, \beta)$ é fechado em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$.

Considere (y^i) uma sequência convergente em $A(\alpha, \beta)$, isto é, $y^i \to y$ em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Mostremos que $y \in A(\alpha, \beta)$. Com efeito, como $y^i \to y$, então dado $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \|y^i - y\| < \epsilon \Rightarrow |y^i(t) - y(t)| < \epsilon$, $\forall t \in I_\alpha$.

Em particular para $n = n_0$, temos:

$$\|y^{n_0} - y\| < \epsilon \Rightarrow |y^{n_0}(t) - y(t)| < \epsilon, \forall t \in I_\alpha$$
$$\Rightarrow |y_t^{n_0}(0) - y_t(0)| < \epsilon, \forall t \in I_\alpha.$$

Assim, $\|y_0\| = \|y_0 - y_0^{n_0} + y_0^{n_0}\| \leq \|y_0 - y_0^{n_0}\| + \|y_0^{n_0}\| = \|y_0 - y_0^{n_0}\| < \epsilon$. Note que $y_0^{n_0} = 0$, pois $y^{n_0} \in A(\alpha, \beta)$.

Portanto, $\|y_0\| < \epsilon$. Como ϵ é arbitrário segue que $y_0 = 0$.

Agora, $\|y_t\| = \|y_t - y_t^{n_0} + y_t^{n_0}\| \leq \|y_t - y_t^{n_0}\| + \|y_t^{n_0}\| < \epsilon + \beta$, $t \in I_\alpha, \forall \epsilon > 0$. Como ϵ é arbitrário segue que $\|y_t\| \leq \beta, \forall t \in I_\alpha$. Logo, $y_t \in B_\beta$, o que implica $y \in A(\alpha, \beta)$.

Portanto, $A(\alpha, \beta)$ é fechado em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$.

Afirmação 3: $A(\alpha, \beta)$ é convexo.

Devemos mostrar que se $y^1, y^2 \in A(\alpha, \beta)$, então o segmento $(1-a)y^1 + ay^2$ está contido em $A(\alpha, \beta)$, $\forall a \in [0, 1]$.

De fato, fixando $a \in [0,1]$ qualquer, temos

$$\begin{aligned}((1-a)y^1 + ay^2)_0(\theta) &= ((1-a)y^1)(\theta) + (ay^2)(\theta)\\ &= (1-a)y^1(\theta) + y^2(\theta)\\ &= 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

pois $y^1, y^2 \in A(\alpha,\beta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$, $t = 0$.

Portanto, $((1-a)y^1 + ay^2)_0 = 0$. E,

$$\begin{aligned}\left\|((1-a)y^1 + ay^2)_t\right\| &= \|(1-a)y^1_t + ay^2_t\| \leq \|(1-a)y^1_t\| + \|ay^2_t\| =\\ &= (1-a)\|y^1_t\| + a\|y^2_t\| \leq (1-a)\beta + a\beta = (1-a+a)\beta = \beta.\end{aligned}$$

Portanto, $((1-a)y^1 + ay^2)_t \in B_\beta$, $\forall t \in I_\alpha$.

Assim, $((1-a)y^1 + ay^2) \in A(\alpha,\beta)$, $\forall a \in [0,1]$. Portanto, $A(\alpha,\beta)$ é convexo.

Afirmação 4: A aplicação $G = T(\sigma,\phi,f^0,\cdot\,) : A(\alpha,\beta) \to A(\alpha,\beta)$ é completamente contínua.

Com efeito, T já é contínua pelo Lema 8 e portanto, $T(\sigma,\phi,f^0,\cdot\,)$ é contínua.

Seja $A \subset A(\alpha,\beta)$ limitado. Mostremos que $G(A) = T(\sigma,\phi,f^0,A)$ tem fecho compacto, ou seja, basta mostrar que $G(A)$ é relativamente compacto. Para isto, provemos que:

(i) $G(A)$ é uniformemente limitado: Sabemos que $G(y) : [-r,\alpha] \to \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$G(y)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r,0],\\ \displaystyle\int_0^t f^0(\sigma+s, \widetilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, & t \in I_\alpha.\end{cases}$$

Seja $y \in A$. Como $A \subset A(\alpha,\beta)$ é limitado, então existe $M > 0$ tal que $\|y\| < M$ e $|y_t| < \beta$, $t \in I_\alpha$ e $y_0 = 0$.

Note que pelo Lema 7, $(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\in V$ e $y\in A(\alpha,\beta)$ para $s\in[0,\alpha]$.

Logo, o conjunto $U=\{(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s); y\in A(\alpha,\beta), s\in[0,\alpha]\}\subset V$ e f^0 é limitada em V. Portanto, f^0 é limitada no conjunto U. Assim, existe $k'>0$ tal que $|f^0(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)|<k'$.

Portanto,

$$\begin{aligned}|G(y)(t)| &= \left|\int_0^t f^0(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\right| \leq \int_0^t |f^0(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)|ds \\ &\leq \int_0^\alpha |f^0(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)|ds \leq \int_0^\alpha k' = \alpha k'.\end{aligned}$$

Note que $\alpha k'$ não depende de y. Portanto, $G(y)$ é uniformemente limitado.

Observe também que

$$\{G(A)(t), t\in I_\alpha\} = \{G(y)(t),\ \forall t\in I_\alpha,\ \forall y\in A\}\subset\mathbb{R}^n$$

é limitado, o que implica que $\overline{\{G(A)\}}$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$. Logo, $\overline{\{G(A)\}}$ é compacto.

(ii) $G(A)$ é equicontínuo. De fato, dado $\epsilon>0$ e $y\in A$, existe $\delta<\frac{\epsilon}{k'}$ tal que, se $|t-a|<\delta$, então

$$\begin{aligned}|G(y)(t)-G(y)(a)| &\leq \int_0^{|t-a|} |f^0(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)|ds \\ &\overset{\text{(i)}}{\leq} \int_0^{|t-a|} k'ds = |t-a|k' < \frac{\epsilon}{k'}k' = \epsilon,\ \forall y\in A.\end{aligned}$$

Portanto, $G(A)$ é equicontínuo.

Assim, por (i)–(ii) e usando o Teorema de Ascoli–Arzelá, segue que $\overline{G(A)}$ é compacto. Portanto, G é completamente contínua.

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, existe $y \in A(\alpha,\beta)$ tal que $T(\sigma,\phi,f^0,y)(t) = y(t)$, $\forall t \in [-r,\alpha]$. Isto é,

$$y(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t f^0(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds, & t \in I_\alpha, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Como, encontrar y é equivalente a resolver

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f^0(t,x_t), \\ x_\sigma = \phi, \end{cases}$$

segue que existe solução para a EDFR(f^0).

De modo mais geral, dado $W \subset \Omega$ compacto e $f^0 \in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$, temos pelo Lema 7 que existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ tal que $f^0 \in C^0(V,\mathbb{R}^n)$ e existe uma vizinhança U de f^0, $U \subset C^0$ e constantes α,β tais que, se $(\sigma,\phi) \in W$ então $(\sigma+t,\widetilde{\phi}_{\sigma+t}+y_t) \in V$ para $t \in I_\alpha$ e $y \in A(\alpha,\beta)$. Portanto, para cada $f \in U$, podemos definir $T(\sigma,\phi,f^0,\cdot) : A(\alpha,\beta) \to A(\alpha,\beta)$ com ponto fixo, ou seja, com solução. Como queríamos demonstrar. ■

Agradecimentos: Agradeço a minha orientadora Marta Cilene Gadotti, por sua ajuda, dedicação e atenção. Ao IGCE pelo apoio financeiro.

Abstract: In this paper we present some preliminary results on Retarded Functional Differential Equations (RFDE) and then the Theorem of Existence of a solution for RFDE based on the reference [1].

Keywords: Delay; Existence; Solution

Referências Bibliográficas

[1] Hale, J.K.; Lunel, S.M.V., *Introduction to Functional Differential Equations.* Springer–Verlag, New York, 1993.

ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem LaTeX, usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em `www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat`, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.