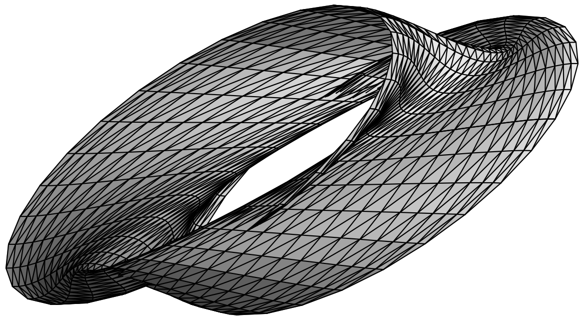
ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat



Volume IV
Outubro de 2007
Departamento de Matemática
IGCE – Rio Claro

unesp

ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE – Unesp – Rio Claro

PET-Matemática / Programa de Educação Tutorial

Editorial

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número teve apoio do Grupo de Pesquisa: Topologia Algébrica, Diferencial e Geométrica e do Grupo PET/Matemática/Unesp/Rio Claro e estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço `www.rc.unesp.br/igce/matematica`

Sumário

O Corpo dos Números Reais é Completo: em que sentido?

Camila Lopes Montrezor
Orientador(a): Nativi Viana Pereira Bertolo

Resumo: Neste trabalho nós apresentamos alguns aspectos da completude do sistema dos números reais.

Palavras-chave: Corpo ordenado completo; axioma do supremo; corpo arquimediano.

1 Introdução

O conjunto dos números reais $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado completo. É um corpo por ser munido das operações usuais, $+, \cdot$, que satisfazem as propriedades de estrutura de corpo; é ordenado pois $\mathbb{R}$ contém um subconjunto P dos números reais positivos que cumpre certas propriedades; e finalmente é completo por satisfazer o axioma do supremo. Resultados significativos da Análise são fundamentados nesse axioma. A questão que se coloca é a seguinte: partindo desses resultados pode-se concluir o axioma do supremo? Tratar dessa questão é o objetivo principal deste trabalho.

2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Aqui vamos postular a existência de um conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos são os números reais, munido das duas operações binárias usuais, adição e multiplicação

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\quad \mapsto \quad x + y \in \mathbb{R} \\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\quad \mapsto \quad x \cdot y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

que satisfazem os seguintes axiomas, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$:

Axioma 1 (Comutatividade). $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

Axioma 2 (Associatividade). $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Axioma 3 (Elemento neutro). Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0 + a = a = a + 0.$$

Axioma 4 (Elemento oposto). Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe um elemento $(-a) \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Axioma 5 (Elemento identidade). Existe um elemento $1 \in \mathbb{R}$, com $1 \neq 0$, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Axioma 6 (Elemento inverso). Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, há um elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Axioma 7 (Distributividade). Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale que

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Os axiomas (1-7) dizem que $\mathbb{R}$ é um corpo.

Vejamos a seguir porque $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Requerer que $\mathbb{R}$ seja um corpo ordenado é postular a existência de um subconjunto P de $\mathbb{R}$, de elementos ditos positivos e tal que:

Axioma 8. Para quaisquer $a, b \in P$,

$$x + y \in P \quad \text{e} \quad x \cdot y \in P.$$

Axioma 9 (Tricotomia). Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, há apenas três possibilidades, que se excluem:

$$a \in P, \quad -a \in P \quad \text{ou} \quad a = 0.$$

A partir disso, dizer que $a < b$ significa dizer que $b + (-a) = b - a \in P$ e $a \leq b$ significa $a < b$ ou $a = b$. Partindo da relação $<$ definimos a relação $>$ da seguinte forma:

$$a > b \Leftrightarrow b < a.$$

Até agora, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado e nada permite diferenciar $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais. O que caracteriza $\mathbb{R}$ é o seguinte axioma, *Axioma do Supremo*, propriedade que $\mathbb{Q}$ não possui. Afirmar que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo é postular o seguinte axioma:

Axioma 10 (AS). Todo subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente tem supremo.

Lembramos que um conjunto não vazio $C \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$, para todo $x \in C$. Um número c nessas condições é denominado uma cota superior do conjunto C. Além disso, se s é cota superior mínima de C no sentido de s ser cota superior e se t é também cota superior de C então $t \geq s$, dizemos que s é supremo de C.

3 Conseqüências do Axioma do Supremo

Como mencionamos na introdução, o Axioma do Supremo (AS) tem conseqüências muito importantes. Nosso objetivo nesta seção é citar várias delas. Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, que é equivalente a dizer que a seqüência $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge para zero, ou ainda, equivalentemente, afirmar que $\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano no seguinte sentido:

PA: Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $na > b$. Com efeito, se não existisse um $n \in \mathbb{N}^*$ nessas condições então $n \cdot a \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, o conjunto $A = \{n \cdot a;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ seria não vazio e limitado superiormente por b, logo teria supremo, pelo Axioma do Supremo. Seja $s = \sup A$, então se $n \in \mathbb{N}^*$

$$n \cdot a = (n+1) \cdot a - a \leq s - a.$$

Logo $s-a$ seria uma cota superior de A e menor que s, o que é contradição.

Continuando, ainda como conseqüência do axioma do supremo, AS, os seguintes resultados são válidos.

***P*₁:** $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo com a métrica usual, ou seja, *toda seqüência se Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*

P_2: Em $\mathbb{R}$ vale a propriedade dos intervalos encaixantes:

Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, uma família de intervalos fechados e encaixados no seguinte sentido:

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

Então existe pelo menos um número c que pertence a todos os intervalos I_n, ou seja, $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Se, além disso, a seqüência $l_n = b_n - a_n$ convergir para zero, então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ contém um único ponto.

P_3: Toda seqüência monótona e limitada é convergente.

P_4: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado e infinito contém ponto de acumulação.

Existem outras conseqüências importantes do Axioma do Supremo, mas neste trabalho não trataremos delas.

4 O que implica o Axioma do Supremo?

Nesta seção, a principal deste trabalho, vamos ver que cada uma das propriedades P_1-P_4 implicam o Axioma do Supremo. Aqui $\mathbb{R}$ será considerado um corpo ordenado e arquimediano, ou seja, suporemos válida a propriedade arquimediana, PA.

Inicialmente vejamos que a propriedade arquimediana implica que a seqüência $\frac{1}{2^n}$ converge para zero. Para isto, basta provar que $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, pois $n \leq 2^n$, para todo n. Isso é possível verificar via indução.

Seja $\varepsilon > 0$. Então $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Assim, em PA, se fizermos $a = 1$ e $b = \frac{1}{\varepsilon}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n_0 \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, se $n \geq n_0$, então $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Logo $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ e então $\left(\frac{1}{2^n}\right) \to 0$.

4.1 O Axioma do Supremo como conseqüência da propriedade dos Intervalos Encaixantes P_2

Vejamos que a propriedade dos intervalos encaixantes implica no Axioma do Supremos (AS). Pois bem, seja $C \subset \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$ e C limitado superiormente. Provemos que C tem supremo. Pois bem, tomemos $a_1 \in C$ e $b_1 \notin C$ com b_1 cota superior de C tal que $a_1 < b_1$. Isso é possível pois $C \neq \emptyset$ e C é limitado superiormente. Seja $a = \frac{a_1+b_1}{2}$ o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$. Claro que a determina dois intervalos: $[a_1, a]$ e $[a, b_1]$. Seja $I_2 = [a_2, b_2]$ aquele entre esses dois intervalos com a seguinte propriedade: a_2 é menor ou igual a algum elemento de C e $b_2 \notin C$ e b_2 é cota superior de C. Veja que $|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$. Prosseguindo assim, consideremos $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $|I_n| = b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$ e mais, a_n é menor ou igual a algum elemento de C e $b_n \notin C$ e b_n é cota superior de C. Dessa forma, temos que $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_n| \to 0$ e I_n são intervalos fechados. Por P_2 temos que existe um único c tal que $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Afirmamos que $c = \sup C$. Para isso mostraremos que c é cota superior de C e c é a menor das cotas superiores de C.

Vejamos inicialmente que c é cota superior de C. Suponhamos que c não seja cota superior de C. Então existe $x \in C, x > c$. Pela construção dos intervalos I_n, temos que $c < x \leq b_n$, para todo n. Como $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ temos que $c \in I_n$, para todo n, e então $c \geq a_n$. Assim, $a_n \leq c < x \leq b_n$. Portanto $[c, x] \subset I_n$, para todo n. Como $x > c$ então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{c\}$, que é contradição. Assim c é cota superior de C. Vejamos agora que c é a menor das cotas superiores. Suponhamos que c não seja a menor das cotas superiores de C. Então existe

$\varepsilon > 0$ tal que $c - \varepsilon$ é cota superior de C. Mas à direita de a_n existe $x \in C$. Logo

$$a_n \leq x \leq c - \varepsilon < c \leq b_n \Rightarrow [c - \varepsilon, c] \subset I_n, \forall n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{c\},$$

que é contradição. Como queríamos demonstrar.

4.2 O Axioma do Supremo como conseqüência de $\mathbb{R}$ ser um espaço métrico completo

Os axiomas (1-9) juntamente com a hipótese de $\mathbb{R}$ ser um espaço métrico completo não implicam no Axioma do Supremo (AS). Existem corpos ordenados que são espaços métricos completos e que não são corpos ordenados completos, ou seja, não vale o Axioma do Supremo. Esses objetos não são facilmente encontrados. Os chamados "números reais não-standart" são um exemplo desse fato. No entanto, se assumirmos a propriedade arquimediana (PA) temos o Axioma do Supremo. Para isso, basta provarmos que vale a propriedade dos intervalos encaixantes e assim usamos 4.1.

Com efeito, seja (I_n) uma seqüência de intervalos encaixantes $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_n| = b_n - a_n \to 0$. Provemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, para algum número c. Mostremos que (a_n) é uma seqüência de Cauchy. Com efeito, sabemos que $|I_n| \to 0$, ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \;/\; n \geq n_0 \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon.$$

Assim

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a_m < b_m \leq b_n \Rightarrow |a_n - a_m| \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

Portanto

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \;/\; m > n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Assim, (a_n) é de Cauchy. Logo, pela hipótese que temos, existe c tal que $a_n \to c$ e mais, $a_n \leq c$. De forma análoga

$$|b_n - b_m| \leq |I_n| < \varepsilon, m > n > n_0 \Rightarrow (b_n) \text{ é de Cauchy} \Rightarrow \exists b / b_n \to b.$$

Portanto, para todo n, $a_n \leq c \leq b \leq b_n$ e assim $[c,b] \subset I_n$, ou seja, $[c,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, isto é, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Se $|I_n| \to 0$, claro que $c = b$ e assim $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = c = b$. Portanto, $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow$ AS, desde que a propriedade arquimediana seja válida. Assim, a propriedade de $\mathbb{R}$ ser completo como espaço métrico, mais o fato de ser arquimediano, implicam que $\mathbb{R}$ é completo no sentido de valer o Axioma do Supremo.

4.3 O Axioma do Supremo como conseqüência de P_3

Provemos que vale o Axioma do Supremo, tendo por hipótese P_3. Seja $A \neq \emptyset$ e A limitado superiormente. Provemos que A tem supremo. Pois bem, seja $a \in A$ e $b \notin A$ e b limitante superior de A. É claro que podemos tomar a e b desta forma. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja k_n o maior inteiro não negativo tal que $0 \leq k_n \leq 2^n$ com

$$\left[b - \frac{k_n(b-a)}{2^n}, b\right] \cap A = \emptyset.$$

Consideremos a seqüência

$$x_n = b - \frac{k_n(b-a)}{2^n}.$$

Claro que a seqüência (x_n) é decrescente e limitada. Logo, por hipótese, (x_n) é convergente. Provemos que $\sup A = \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Suponha que x não seja cota superior de A. Assim, existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 > x$. Como $x_n \to x$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $x_{n_0} < x_0$, o que não pode ocorrer pela definição da seqüência (x_n). Assim, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ é cota superior de A. Provemos que é a menor das cotas superiores de A. Se x não é a menor das cotas superiores de A, então existe s cota superior de A tal que $s < x$. Seja $\varepsilon = x - s$, então existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (s, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Tomamos n tal que $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$. Como k_n é o maior inteiro, $[x_n, b] \cap A = \emptyset$ e então

$$\emptyset \neq \left[b - \frac{(k_n+1)(b-a)}{2^n}, b - \frac{k_n(b-a)}{2^n}\right] \cap A \subset (s, x+\varepsilon),$$

pois $b - \frac{k_n(b-a)}{2^n} - b + \frac{(k_n+1)(b-a)}{2^n} = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$. Portanto, existe $c \in A$ tal que $c > s$, contradição pois s é cota superior de A.

4.4 O Axioma do Supremo como conseqüência de P_4

Para provarmos que P_4 implica o Axioma do Supremo, consideramos a mesma seqüência (x_n) construída em 4.3 e provamos que $x_{n+1} \leq x_n$. Se (x_n) for finita, convergirá para seu menor termo, enquanto que se (x_n) for infinita, o conjunto $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ terá ponto de acumulação para o qual (x_n) convergirá. Em ambos os casos, teremos que $\sup A = \lim_{n\to\infty} x_n$.

5 Considerações Finais

Para encerrar este trabalho observamos que podemos ir além e obter resultados mais gerais que inclui o conteúdo deste trabalho e que a seguir apenas enunciaremos.

Teorema. *Entre todos os corpos K totalmente ordenados e arquimedianos, o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é caracterizado pelas seguintes propriedades equivalentes:*

1. Toda seqüência crescente e limitada é convergente (C4).
2. Todo subconjunto não vazio de K limitado superiormente tem supremo (P1).
3. Todo subconjunto fechado e limitado de K tem um máximo e um mínimo.
4. K é conexo.
5. Se (A, B) é um corte de Dedekind, então A tem um máximo e B tem um mínimo.
6. Toda seqüência de intervalos encaixantes tem intersecção não vazia (C3).
7. K é seqüencialmente completo, isto é, toda seqüência de Cauchy é convergente (C2).

8. Vale a propriedade de Heine-Borel: todo recobrimento de um intervalo fechado em K por intervalos abertos tem sub-recobrimento finito.

9. Vale a propriedade de Bolzano-Lebesgue: todo subconjunto fechado e limitado de K é compacto.

10. Vale a propriedade de Bolzano-Weiestrass: toda seqüência limitada de K tem uma subseqüência convergente.

Observamos que num corpo totalmente ordenado K, todas as propriedades acima, exceto 6 e 7, são equivalentes e implicam que K é arquimediano. Para um estudo mais completo do assunto sugerimos os dois primeiros livros presentes na bibliografia deste trabalho.

Abstract: In this work we present some aspects of completeness of the real number system.

Keywords: Complete ordered field; least upper bound axiom; archimedean fields.

Referências Bibliográficas

[1] Buck, R.C., *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, 1965.

[2] Cohen, L.W., *The structure of the real number system*, Van Nostrand Reinhold Comp., 1963.

[3] Ávila, G.S.S., *Introdução à Análise Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, 1993.

[4] White, A.J., *Análise Real: uma introdução*, tradução Editora Edgard Blücher Ltda, Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

[5] Hönig, C.S. *Aplicações da Topologia à Análise*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1976.

Uma Introdução à Teoria de Conjuntos Fuzzy e Alguma Aplicações

Danillo Shindi Asano[1], Maicon Henrique Cunha* e Ricardo Ferreira da Rocha*

Orientador(a): Renata Zotin Gomes de Oliveira e Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

Resumo: Apresentaremos conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy e algumas aplicações.

Palavras-chave: Lógica fuzzy, conjuntos fuzzy, funções de pertinência.

1 Introdução

Um conjunto clássico classifica indivíduos de um certo universo de discurso de duas formas: membros (aqueles que certamente pertencem ao conjunto) e não membros (aqueles que certamente não pertencem). Entretanto, muitos termos que utilizamos normalmente e expressamos em linguagem natural descrevem conjuntos que não exibem estas características. Exemplos são o conjunto das pessoas altas, carros caros, doenças altamente contagiosas etc. Percebemos que estes conjuntos têm fronteiras imprecisas que facilitam transições graduais de pertinência a não pertinência e vice-versa.

Um conjunto fuzzy pode ser definido matematicamente atribuindo a cada indivíduo do universo de discurso um valor que representa o grau de pertinência a um conjunto fuzzy. Foi em 1965 que Zadeh formalizou a idéia de conjuntos fuzzy, ou seja, conjuntos com fronteiras não precisas.

Neste texto apresentamos alguns conceitos introdutórios dessa teoria e algumas aplicações.

[1]Bolsista PET

2 Conjuntos Fuzzy

Num subconjunto A, contido num conjunto clássico U, podemos definir a pertinência de um elemento através de uma função, chamada função característica, definida por:

$$\psi : U \to \{0, 1\}$$

onde

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Dessa forma, a função característica descreve completamente o conjunto A já que tal função indica quais elementos do conjunto universo U são elementos também de A.

Seja agora U um conjunto clássico. Dizemos que um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado conforme a seguinte função, chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F:

$$\phi_F : U \to [0, 1].$$

O valor $\phi_F(x)$ indica o grau com que o elemento x de U pertence ao conjunto fuzzy F, onde $\phi_F = 0$ indica a não pertinência e $\phi_F = 1$ indica pertinência total. Sendo assim, um subconjunto fuzzy F de U pode ser representado pelo conjunto (clássico) de pares ordenados da forma:

$$F = \{(x, \phi_F(x)), x \in U\}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1. Vamos definir o subconjunto fuzzy dos idosos. De acordo com a idade, a pertinência do elemento no conjunto deve crescer, logo, devemos definir uma função de pertinência crescente. Tomemos a seguinte função de pertinência:

$$\phi_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 10 \\ (x - 10)/70 & \text{se } 10 \leq x \leq 80 \\ 1 & \text{se } x > 80 \end{cases}$$

Neste caso, um indivíduo de 60 anos possui grau de pertinência igual $\frac{5}{7}$ enquanto um de 20 anos apenas $\frac{1}{7}$. Um indivíduo de "meia idade", isto é, pertinência igual a $0,5$ deve ter a idade de 45 anos. É importante ressaltar que outro tipo de função de pertinência pode ser definida.

A seguir, definiremos diversas operações para subconjuntos fuzzy, como união, intersecção e complementar.

1. A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por:
$$\phi_{A\cup B}(x) = \max\{\phi_A(x), \phi_B(x)\}.$$

2. A intersecção entre A e B é o conjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por:
$$\phi_{A\cap B}(x) = \min\{\phi_A(x), \phi_B(x)\}.$$

3. O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por:
$$\phi_{A'}(x) = 1 - \phi_A(x), x \in U.$$

Observe que as operações anteriores são válidas se A e B são conjuntos clássicos com suas respectivas funções características ψ_A e ψ_B.

Se as funções de pertinência para A e B não são discretas, as figura abaixo representam geometricamente as operações $A \cup A'$, $A \cap A'$ e A'.

Exemplo 2. Tomemos o conjunto das pessoas febris e/ou com dor muscular. Suponhamos que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, indentificados pelos números 1,2,3,4 e 5. Sejam A e B os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre ou dor muscular, respectivamente. A seguinte tabela ilustra as operações união, intersecção e complemento. Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada

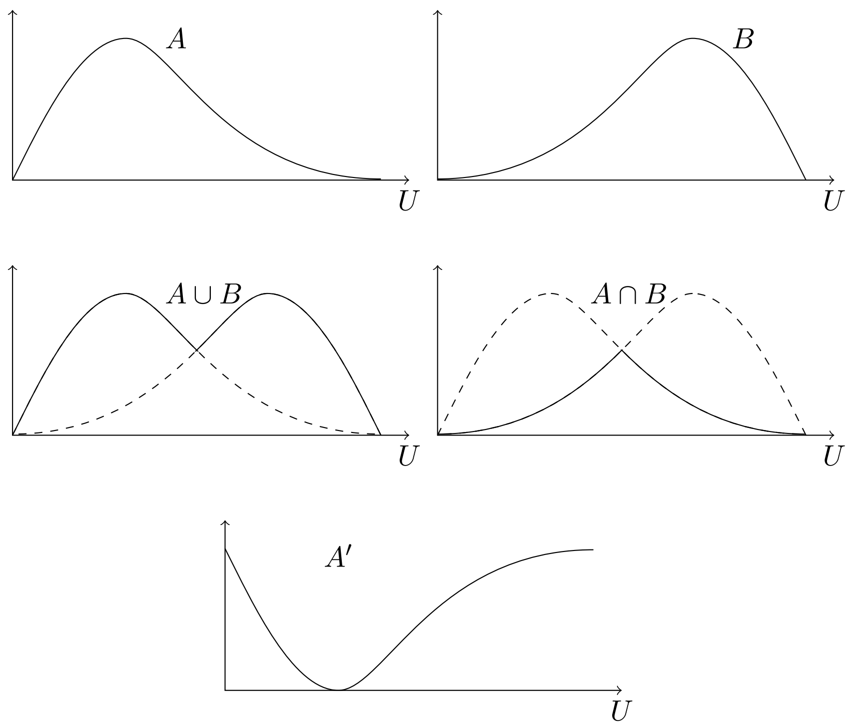


Figura 1.1: Representação geométrica de $A \cup B$, $A \cap B$ e A'. [1]

paciente pertence aos conjuntos fuzzy A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A', $A \cap A'$, $A \cup A'$, respectivamente, onde A e B são supostamente dados:

Paciente	Febre: A	Dor: B	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A \cap A'$	$A \cup A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3	0,7
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4	0,6
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0	1,0

Notemos que no caso dos subconjuntos fuzzy, diferentemente da teoria clássica, $A \cap A'$ pode ser um subconjunto diferente do vazio assim como $A \cup A'$ pode não ser o universo todo.

Na coluna $A \cap A'$, o valor 0,3 indica que o paciente 1 está tanto no grupo dos febris como no dos não febris. Este é um fato inadmissível na teoria clássica dos conjuntos na qual tem-se a lei do terceiro excluído, isto é, $A \cap A' = \emptyset$.

3 Lógica Fuzzy

O termo lógica fuzzy tem sido utilizado para manipular informações inexatas lançando mão da teoria de conjuntos fuzzy e de suas operações. Os primeiros passos em lógica matemática são realizados com o estudo dos conectivos "e", "ou", "não" e "implicação". Tais conectivos são tipicamente usados na modelagem matemática em sentenças do tipo:

"Se a está em A e b está em B, então c está em C ou d não está em D" (1.1)

Os valores lógicos para cada conectivo são estudados por meio de tabelas verdades. Assim, o valor lógico de uma sentença, formada a partir de duas ou mais proposições, é obtido por meio de composições das tabelas verdades dos conectivos presentes nesta sentença.

Na lógica clássica, sentenças verdadeiras têm valor lógico 1, enquanto sentenças falsas têm valor lógico 0. Pensando na extensão para o caso fuzzy, usaremos a notação (mínimo) para a conjunção "e"; (máximo) para "ou"; η para a negação e $\Rightarrow$ para a implicação.

Façamos as tabelas verdades para os conectivos "e", "ou", "negação" e "implicação".

p	$\neg p$
1	0
0	1

(a) $\neg p$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(b) $p \wedge q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(c) $p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(d) $p \Rightarrow q$

Podemos notar que em cada tabela verdade, p e q assumem apenas valores 0 ou 1. Por isso, a lógica clássica é, às vezes, chamada de "lógica a dois valores".

Voltemos para a expressão (1.1). De acordo com a lógica clássica, tal expressão só poderia assumir os valores 0 ou 1. Agora, se admitirmos que os conjuntos em (1.1) possam ser fuzzy, como avaliar logicamente tal expressão?

Inicialmente, devemos atribuir um valor que indique o quanto a proposição "a está em A" é verdadeira, com A fuzzy, sabendo que um elemento pode pertencer a A com valores no intervalo $[0, 1]$. Para realizar a avaliação lógica dos conectivos no sentido fuzzy, devemos estendê-los. Tais extensões são obtidas por meio das normas e conormas.

Definamos agora, as operações t-norma, t-conorma, negação e implicação.

O operador $\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $\triangle(x,y) = x \triangle y$ é uma t**-norma**, se satisfizer as seguintes condições:

1. Elemento neutro: $\triangle(1, x) = 1 \triangle x = x$;

2. Comutativa: $\triangle(x, y) = x \triangle y = y \triangle x = \triangle(y, x)$;

3. Associativa: $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$;

4. Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \triangle y \leq u \triangle v$.

O operador t-norma estende o operador $\wedge$ que modela o conectivo "e".

O operador $\bigtriangledown(x, y) = x \bigtriangledown y$ é uma t**-conorma** se satisfizer as seguintes condições:

1. Elemento neutro: $\bigtriangledown(0, x) = 0 \bigtriangledown x = x$;

2. Comutativa: $\bigtriangledown(x, y) = x \bigtriangledown y = y \bigtriangledown x = \bigtriangledown(y, x)$;

3. Associativa: $x \bigtriangledown (y \bigtriangledown z) = (x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z$;

4. Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \bigtriangledown y \leq u \bigtriangledown v$.

O operador t-conorma estende o operador do conectivo "ou". Por exemplo, $\triangle(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y$ é um operador t-norma, assim como $\bigtriangledown(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y$ é um operador t-conorma.

Negação: uma aplicação $\eta : [0,1] \to [0,1]$ é uma negação se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Fronteiras: $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$;
2. Involução: $\eta(\eta(x)) = x$;
3. Monotonicidade: η é decrescente.

Implicação fuzzy: qualquer operação $\Rightarrow: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que reproduza a tabela verdade da implicação clássica é denominada implicação fuzzy.

Com as definições de negação e implicação podemos encontrar várias funções que satisfaçam tais propriedades, por exemplo, a aplicação $\eta(x) = 1 - x$ é uma negação pois reproduz a tabela verdade da negação. Para a implicação, podemos tomar como exemplo a implicação de Zadeh: $(x \Rightarrow y) = z(x,y) = \max\{(1-x), \min\{x,y\}\}$.

Agora, com as ferramentas em mãos, vejamos um exemplo ilustrativo. Vamos voltar a expressão (1.1) e obter seu valor lógico quando consideramos $\triangle = \wedge$, $\bigtriangledown = \vee$, $\eta(x) = 1 - x$ e a implicação de Zadeh.

Inicialmente, para cada variável da expressão (1.1), tomamos seu grau de pertinência ao conjunto relacionado. Consideremos, por exemplo, que tais valores sejam: "a está em A" $= 0,6$, "b está em B" $= 0,7$, "c está em C" $= 0,4$ e "d não está em D" $= 0,7$. Então, temos:

$$\triangle(0,6;0,7) = \min\{0,6;0,7\} = 0,6$$
$$\eta(0,7) = 1 - 0,7 = 0,3$$
$$\bigtriangledown(0,4;0,3) = \max\{0,4;0,3\} = 0,4$$

Logo o valor lógico de (1.1) é o resultado da aplicação

$$\triangle(0,6;0,7) \Rightarrow \bigtriangledown(0,4;0,3).$$

Usando a implicação de Zadeh, temos

$$0,6 \Rightarrow 0,4 = z(0,6;0,4) = \max\{(1-0,6), \min\{(0,6;0,4\}\} = \max\{0,4\} = 0,4.$$

Assim, para as pertinências acima, a expressão (1.1) é verdadeira com grau 0,4.

4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Um sistema baseado em regras fuzzy é aquele que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy. As regras são da forma

Se "estado" então "resposta".

A particularidade dos controladores fuzzy é que cada regra tem a forma:

Se "condição" então "ação".

4.1 Controladores Fuzzy

Um controlador fuzzy visa aproximar a estratégia de um controlador humano, já que se torna possível traduzir termos lingüísticos constantemente empregados por especialistas com o intuito de solucionar suas tarefas. Possuem a seguinte estrutura:

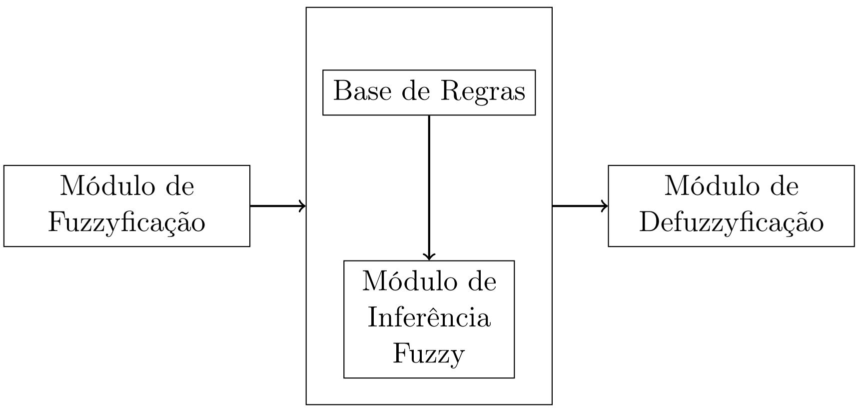


Figura 1.2: Esquema de um controlador Fuzzy. [1]

- **módulo de fuzzificação:** é o estágio onde são modeladas as entradas do sistema por conjuntos fuzzy, com seus respectivos domínios e funções de pertinência.

- **base de regras:** é composta pelas proposições fuzzy e faz parte do núcleo dos controladores fuzzy. Cada proposição é descrita na forma lingüística:

  Se x_1 é A_1, x_2 é A_2, $\ldots$ e x_n é A_n Então: u_1 é B_1, u_2 é B_2, $\ldots$ e u_n é B_n

- **módulo de inferência:** é o estágio em que cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente por meio de técnicas da lógica fuzzy. Esse módulo fornecerá a saída (controle) fuzzy a ser adotada pelo controlador, a partir de cada entrada fuzzy.

O último processo chamado Módulo de Defuzzificação permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp (número real).

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.

$$\begin{cases} N_{1,t+1} = \dfrac{1-m_{12}}{2} F_1 S_1^{e^{-(f+s)N_{1,t}}} N_{1,t} + \dfrac{m_{21}}{2} F_2 S_2^{e^{-(f+s)N_{2,t}}} N_{2,t} \\ N_{2,t+1} = \dfrac{m_{12}}{2} F_1 S_1^{e^{-(f+s)N_{1,t}}} N_{1,t} + \dfrac{1-m_{21}}{2} F_2 S_2^{e^{-(f+s)N_{2,t}}} N_{2,t} \end{cases}$$

Este modelo relaciona a dinâmica de uma população de moscas com o processo de migração entre duas colônias. As variáveis de estado são:

$N_{i,t}$: população de moscas da colônia i no instante t;

F_i: fecundidade máxima das moscas quando estas se encontram na colônia i;

S_i: sobrevivência máxima das moscas da colônia i;

m_{ij}: taxa de migração da colônia i para j;

f e s: estimam a variação da fecundidade e da sobrevivência, respectivamente.

As incertezas deste modelo estão nos parâmetros m_{ij}, F_1 e S_1, dependentes de uma série de fatores que muitas vezes são impossíveis de serem determinados quantitativamente. Neste caso, um estudo do fenômeno a partir de um sistema fuzzy parece mais adequado. O processo consiste em substituir os parâmetros da equação determinística por parâmetros subjetivos, obtidos por meio de uma combinação de regras.

Vamos considerar que os parâmetros m_{ij}, F_1 e S_1 sejam dependentes de duas variáveis de entrada: a População ($N_{1,t}$) e o Ambiente (A_i, habitat de cada colônia).

Para a População, a partir de dados experimentais obteve-se o comportamento para os termos: Pequena, Média e Grande. Para o Ambiente os termos lingüísticos considerados foram Hostil, Mediano e Favorável. Partindo disso, foram definidos os conjuntos fuzzy representados a seguir:

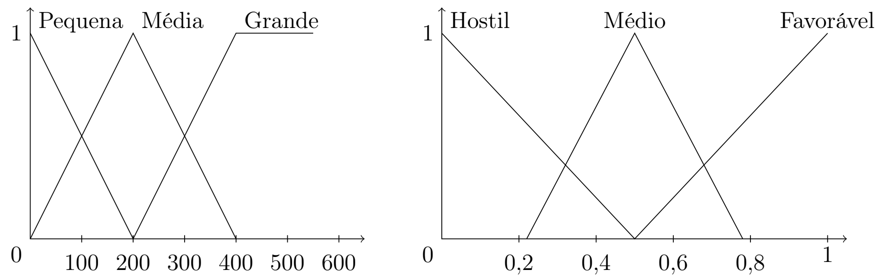


Figura 1.3: Funções de pertinência para População e Ambiente. [1]

Para modelar os parâmetros fuzzy taxa de migração, fecundidade F_1 e sobrevivência S_1 foram adotadas as regras:

População	Ambiente		Então	
		Migração	Fecundidade	Sobrevivência
Pequena	Favorável	Pequena	Alta	Alta
Pequena	Mediana	Pequena	Alta	Média
Pequena	Hostil	Grande	Média	Baixa
Média	Favorável	Pequena	Alta	Média
Média	Mediana	Grande	Alta	Baixa
Média	Hostil	Grande	Baixa	Baixa
Grande	Favorável	Média	Média	Baixa
Grande	Mediana	Grande	Baixa	Baixa
Grande	Hostil	Grande	Baixa	Baixa

Para a migração, como visto na tabela, adotou-se os termos pequena, média e grande; para fecundidade e sobrevivência os termos adotados foram baixa, alta e média. A partir dessa base de regras, utilizando softwares como o "matlab", que possuem pacotes fuzzy, obtemos os valores fuzzy para taxa de migração, fecundidade e sobrevivência:

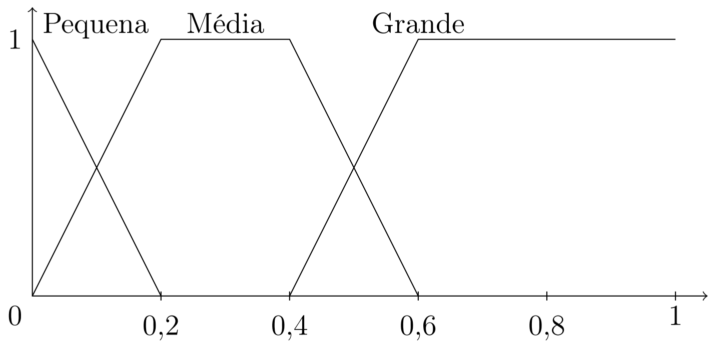


Figura 1.4: Funções de pertinência para migração. [1]

Como visto na figura acima, temos o gráfico da taxa de migração, onde é possível ver os Conjuntos Fuzzy (Pequena, Média e Grande).

A seguir temos os gráficos que representam os valores fuzzy de fecundidade e sobrevivência respectivamente:

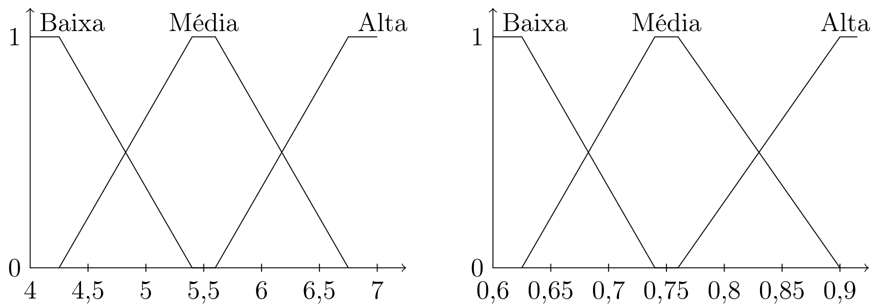


Figura 1.5: Funções de pertinência para fecundidade e sobrevivência. [1]

Por meio do método de Inferência de Mandami, através da base de regras, obtemos os valores fuzzy de saída. Exemplo: Inicialmente são dadas as condições iniciais, por exemplo:

$$N_{1,0} = 300, \qquad N_{2,0} = 700, \qquad A_{1,0} = 0,01, \qquad A_{2,0} = 0,03.$$

Os valores das condições iniciais são as variáveis de entrada.

Os parâmetros fuzzy são obtidos através das bases de regras via processo de Mandami. Na colônia 1, temos: $\phi_{pM}(300) = 0,5$ (grau de pertinência ao conjunto fuzzy de população média ou grande); $\phi_{AH}(0,01) = 0,995$ (grau de pertinência ao Conjunto Fuzzy ambiente hostil). Então

$$0,5 \wedge 0,995 = \min\{0,5; 0,995\} = 0,5.$$

Pela base de regras, temos que população média ou grande, e ambiente hostil, geram o conjunto fuzzy migração grande como variável de saída.

Para que o nosso modelo inicial seja resolvido, é preciso encontrar os valores de saída fuzzy para cada parâmetro fuzzy analisado, a partir das condições iniciais dadas e defuzzificá-los, por meio de métodos de defuzzificação. Depois de realizado esse processo, encontraremos valores reais para os parâmetros m_{ij}, F_1 e S_1, que aplicados no modelo inicial, recursivamente nos darão a solução do sistema.

Os Controladores Fuzzy possuem muitas aplicações. Atualmente são largamente utilizados em aparelhos eletrodomésticos, sendo o Japão o primeiro país a investir na Indústria e, mais recentemente, tem recebido grande atenção na Medicina, principalmente no que se refere a dignósticos médicos, como o simples exemplo descrito a seguir.

Exemplo 4. A idéia é propor um sistema fuzzy que imite a atuação de um médico no diagnóstico de seus pacientes, a partir de sintomas que estes apresentam.

Consideremos os seguintes conjuntos universais:

$$U = \text{conjunto dos pacientes;}$$
$$V = \text{conjunto de sintomas;}$$
$$W = \text{conjunto de doenças.}$$

Neste exemplo consideramos quatro pacientes P_1, P_2, P_3 e P_4, com os sintomas

S_1 = febre, S_2 = cefaléia, S_3 = garganta inflamada,
S_4 = exantema, S_5 = gânglio, S_6 = coriza,
S_7 = conjuntivite, S_8 = língua de morango, S_9 = fotofobia,
S_{10} = tosse seca S_{11} = vômito

que apresentaram os diagnósticos

D_1 = escalartina, D_2 = rubéola, D_3 = sarampo D_4 = gripe.

Essas informações irão compor a base de dados que serão expressos por meio de relações fuzzy. Um especialista pode estabelecer o grau com que cada sintoma se apresenta em cada indivíduo e representá-lo conforme a tabela abaixo:

$P_i \backslash S_j$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
P_1	0,8	0,4	0,5	0,8	0,2	0,1	0,1	0,9	0,1	0,1	0,4
P_2	0,3	0,1	0,4	0,8	0,9	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
P_3	0,8	0,3	0,5	0,8	0,1	0,2	0,9	0,1	0,6	0,3	0,6
P_4	0,8	0,7	0,7	0,2	0,1	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9	0,4

Assim, de acordo com os sintomas apresentados, cada paciente pode ter algumas das doenças citadas acima com um certo grau de possibilidade. A resposta do nosso exemplo é um conjunto fuzzy, ou seja, ela não responde qual doença o paciente possui, o que ela fornece é a possibilidade do paciente possuir certa doença no conjunto de sintomas.

Abstract: We present basic concepts of Fuzzy Sets Theory and some applications.

Keywords: Fuzzy logic, membership function, fuzzy sets.

Referências Bibliográficas

[1] Barros, L.C. e Bassanezi, R.C., *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Coleção IMECC Textos Didáticos 5, 2006.

[2] Feitosa, H.A. da, *Princípios Fundamentais da Teoria Fuzzy, Dissertação para obtenção do título de mestre em Matemática*, IGCE, UNESP, 1992.

[3] Klir, G.I., *Fuzzy Sets: An Overview of Fundamentals, Applications and Personal Views*, Beijing Normal University Press, 1999.

[4] Castanho, M.J.P.; Magnago, K.F.; Bassanezi, R.C. e Godoy, W., *Fuzzy Subset Approach in coupled population dynamics of blowlies*, Biological Research, (aceito em 2006).

[5] Barros, L.C.; Bassanezi, R.C; Jafelice, R.S.M. e Peixoto, M.S., *Mini Curso: Introdução à Lógica Fuzzy*, Simpósio de Aplicações em Lógica Fuzzy, Unesp - Sorocaba - SP, 2006.

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no Plano

Thaís Jordão[1]
Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

Resumo: Neste trabalho apresentamos uma prova do teorema de Ponto Fixo de Brouwer no plano, usando o grupo fundamental.

Palavras-chave: Grupo fundamental, ponto fixo.

1 Preliminares

Para o que segue denotaremos por I o intervalo fechado $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ e por X um espaço topológico. A seguir daremos algumas definições:

Definição 1. Sejam $x_0, x_1 \in X$. Um caminho em X com ponto inicial em x_0 e ponto final em x_1 é uma aplicação contínua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Se $\alpha(0) = \alpha(1)$, então dizemos que o caminho é um laço ou um caminho fechado em X.

Denotaremos por $\Omega(X; x_0, x_1)$ o conjunto formado pelos caminhos em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 e por $\Omega(X; x_0)$ o conjunto formado pelos laços em X baseados em x_0.

Definição 2. Dados dois caminhos $\alpha, \beta : I \to X$ tais que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$, onde $x_0, x_1 \in X$, dizemos que o caminho α é homotópico ao caminho β, se existe uma aplicação $F : I \times I \to X$ contínua tal que:

$$\begin{array}{lll} H(t,0) = \alpha(t) & H(t,1) = \beta(t) & \forall\, t \in I. \\ H(0,s) = x_0 & H(1,s) = x_1 & \forall\, s \in I. \end{array}$$

A aplicação H é dita ser uma homotopia entre α e β. Usaremos a notação $\alpha \sim \beta$ para dizer que α é homotópico a β. Observamos que a relação $\sim$ é uma relação

[1]Estágio de Iniciação Científica.

de equivalência em $\Omega(X;x_0)$. Além desta relação, podemos definir em $\Omega(X;x_0)$ uma operação $*$, chamada justaposição de caminhos.

Definição 3. Sejam $\alpha, \beta \in \Omega(X;x_0)$. O caminho produto ou justaposto de α por β, denotado por $\alpha * \beta$, é dado por:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esta operação não satisfaz a associatividade, logo não dá a $\Omega(X;x_0)$ uma estrutura de grupo.

2 O Grupo Fundamental

Como dito anteriormente a relação $\sim$ é de equivalência em $\Omega(X;x_0)$; logo podemos considerar o conjunto quociente $\dfrac{\Omega(X,x_0)}{\sim}$ o qual denotaremos por $\pi_1(X;x_0)$.

Neste conjunto definimos a operação

$$\diamond : \pi_1(X;x_0) \times \pi_1(X;x_0) \to \pi_1(X;x_0),$$

induzida de $*$, da seguinte forma: $\diamond([\alpha],[\beta]) = [\alpha] \diamond [\beta] = [\alpha * \beta]$ para quaisquer $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X;x_0)$. Tal operação é bem definida, satisfaz a associatividade, todo elemento possui um inverso e existe um elemento neutro. Desta forma, temos:

Teorema 4. $(\pi_1(X;x_0), \diamond)$ *é um grupo.*

Definição 5. O grupo $(\pi_1(X;x_0), \diamond)$ é denominado **Grupo Fundamental** do espaço topológico X com ponto base x_0.

O resultado abaixo dá uma propriedade interessante a respeito do Grupo Fundamental de determinados espaços topológicos e justifica o uso da notação polida, $\pi_1(X)$, que passaremos a utilizar.

Definição 6. Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Dados $x_0, x_1 \in X$ temos que $\pi_1(X;x_0) \approx \pi_1(X;x_1)$.

Exemplo 7.

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$;
- $\pi_1(D) = \{0\}$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$;

3 Aplicação

Inicialmente definiremos um conceito muito importante; o de retrato de um espaço topológico, que nos será útil para demonstrarmos o Teorema do ponto fixo de Brouwer no plano.

Definição 8. Seja $A \subseteq X$ um subespaço. Dizemos que A é um retrato de X, se existe uma aplicação $r : X \to A$ contínua tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

A aplicação r é dita ser uma retração de X sobre A.

Exemplo 9. Se $A \subseteq X$ é um retrato, então o homomorfismo induzido nos Grupos Fundamentais de A e de X, pela inclusão $i : A \to X$, é um monomorfismo.

De fato, como A é um retrato de X, temos que existe uma aplicação $r : X \to A$ contínua tal que $r(a) = a$, $\forall a \in A$. Então, $(r \circ i)(a) = a$ para todo $a \in A$, ou seja, $r \circ i = \mathrm{id}_A$ onde $\mathrm{id}_A : A \to A$ denota a aplicação identidade de A. Logo, o homomorfismo induzido $(r \circ i)_\# : \pi_1(A) \to \pi_1(A)$, dado por $(r \circ i)_\#([\beta]) = [(r \circ i) \circ \beta]$ é tal que

$$(r \circ i)_\# = r_\# \circ i_\# = \mathrm{id}_{A\#} = \mathrm{id}_{\pi_1(A)},$$

implicando que $i_\#$ é um monomorfismo.

Exemplo 10. Consideremos $i_\# : \pi_1(S^1) \to \pi_1(D)$, o homomorfismo induzido da inclusão $i : S^1 \to D$. Como $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ e $\pi_1(D) \approx \{0\}$, a aplicação $i_\#$ não pode ser um monomorfismo. Logo, pelo exemplo anterior, concluímos que S^1 não é um retrato do disco D.

Agora, estamos em condições de demonstrar o

Teorema 11 (Teorema do ponto fixo de Brouwer no plano). *Toda aplicação contínua do disco no disco admite um ponto fixo.*

Prova: Seja $f : D \to D$ uma aplicação contínua, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ é o disco.

Suponhamos que a aplicação f não possua nenhum ponto fixo, isto é, para todo $z \in D$, $f(z) \neq z$. Considere a semi-reta com origem em z e passando por $f(z)$.

Definamos $h : D \to S^1$ por $h(z) = P_z$ para todo $z \in D$, onde P_z é o ponto da interseção de S^1 com a semi-reta $\{z + t(z - f(z)); t \geq 0\}$.

Temos que a aplicação h é bem definida, contínua e se $z \in S^1$, $h(z) = z$. Logo, $h : D \to S^1$ é uma retração de D sobre S^1, o que é um absurdo, pois S^1 não é retrato do disco D.

Portanto, f admite pelo menos um ponto fixo. ■

Abstract: In this work we present a proof of the Brouwer Fixed Point Theorem in the 2-dimensional case. We use the fundamental group to prove it.

Keywords: Fundamental group, fixed point.

Referências Bibliográficas

[1] Wall, C.T.C., *A geometric introduction to Topology*, Addison-Wesley Publ. comp. Inc., 1972.

[2] Massey, W., *Algebraic Topology: an introduction*, Springer Verlag, 1986.

[3] Lima, E.L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Projeto euclides, 1998.

Um Contraste Entre Espaços Normados de Dimensão Finita e Infinita

Naiara Vergian de Paulo[1]

Orientador(a): Simone Mazzini Bruschi

Resumo: Importantes inferências da Matemática se baseiam na hipótese fundamental de que o espaço considerado é finito-dimensional.
Nestas notas apresentaremos de forma breve alguns conceitos, ilustrados através de exemplos, e em seguida exibiremos resultados que os relacionam e que serão válidos apenas para espaços normados de dimensão finita, em contraste com espaços normados de dimensão infinita, nos quais contra-exemplos destes resultados serão apresentados.
Um dos objetivos deste trabalho é explorar a mescla das áreas de Análise, Álgebra e Topologia. Para isto é importante que o leitor possua conhecimentos básicos destas três áreas, como por exemplo, função contínua, uniformemente contínua e lipschtiziana, seqüência convergente e de Cauchy, supremo de um conjunto, convergência uniforme e pontual, série, espaço vetorial, subespaço vetorial, norma, transformação linear, produto interno, subespaço ortogonal, conjunto fechado, limitado e compacto, homeomorfismo, além de resultados que unem alguns destes conceitos.

Palavras-chave: Espaço vetorial normado, dimensão finita, dimensão infinita, espaço de Banach, transformação linear contínua, transformação linear limitada, conjunto fechado, conjunto limitado, conjunto compacto, subespaço ortogonal, normas equivalentes.

[1]PET-Programa de Educação Tutorial

1 Espaços Vetoriais Normados

Neste primeiro capítulo veremos a definição de espaço vetorial normado e em seguida apresentaremos alguns exemplos interessantes que serão úteis posteriormente.

Definição 1. Um espaço vetorial E munido de uma norma $\| \ \|$ é chamado espaço vetorial normado.

Como exemplos podemos citar os seguintes:

Exemplo 2. $\mathbb{R}$ com as operações usuais de soma e multiplicação munido da norma

$$\|x\| = |x|,$$

onde $| \ |$ denota o módulo de números reais.

Exemplo 3. $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar munido de uma das normas abaixo:

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, com $1 \leq p < \infty$.
- $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exemplo 4. $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ / \ f$ é função contínua$\}$ com as operações usuais de funções e munido de uma das seguintes normas

- $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$, com $1 \leq p < \infty$.
- $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Exemplo 5. $l_p(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \ / \ x_i \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$, para $1 \leq p < \infty$, com as operações usuais de seqüências e munido da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemplo 6. $l_\infty(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \ / \ x_i \in \mathbb{R} \text{ e } \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}$ novamente com as operações usuais de seqüências e munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|.$$

2 Espaços de Banach

Sabemos que toda seqüência convergente é de Cauchy, porém nem sempre as seqüências de Cauchy convergem. Neste capítulo daremos destaque aos espaços normados em que toda seqüência de Cauchy é convergente.

Temos então a definição:

Definição 7. Um espaço de Banach é um espaço normado onde toda seqüência de Cauchy é convergente.

Como exemplo de espaço de Banach podemos citar o espaço vetorial real munido da norma do módulo, visto no Exemplo 2, e também este que segue.

Exemplo 8. $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k|$.

De fato, seja $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy que a cada $i \in \mathbb{N}$ associa $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right) \in \mathbb{R}^n$. Variando i ficamos com:

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$$

$$x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$$

$$x^{(3)} = \left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_k^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$$

$$\vdots$$

Observe que nesta "tabela" os índices sobrescritos variam de acordo com o índice $i \in \mathbb{N}$ da seqüência $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ e os índices subescritos variam conforme a coordenada $k = 1, \ldots, n$ do elemento $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$.

Se fixarmos a coordenada k dos elementos dessa seqüência e continuarmos variando i (olhe para cada coluna da "tabela" acima), obteremos as n seqüências reais seguintes:

$$\begin{gathered}
\left(x_1^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_1^{(i)}, \ldots\right) \\
\left(x_2^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \ldots, x_2^{(i)}, \ldots\right) \\
\left(x_3^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_3^{(i)}, \ldots\right) \\
\vdots \\
\left(x_k^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}, \ldots, x_k^{(i)}, \ldots\right) \\
\vdots \\
\left(x_n^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \ldots, x_n^{(i)}, \ldots\right)
\end{gathered}$$

Sendo $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy por hipótese, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j > i_0$ então $\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_\infty < \epsilon$, ou equivalentemente, $\sup\limits_{1\leq k\leq n}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| < \epsilon$. Mas como $\sup\limits_{1\leq k\leq n}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| \geq \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|$ para cada $k = 1, \ldots, n$, temos neste caso que

$$\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| \leq \sup_{1\leq k\leq n}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| = \left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_\infty < \epsilon,$$

para cada k fixado.

Desta forma criamos n seqüências reais que são também de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach com a norma do módulo, cada uma dessas n seqüências

$\left(x_k^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para um $x_k \in \mathbb{R}$, ou seja, para cada $k = 1, \ldots, n$, $\lim\limits_{i\to\infty} x_k^{(i)} = x_k$.

Podemos então construir um elemento x de $\mathbb{R}^n$ em que cada coordenada k é dada por $\lim\limits_{i\to\infty} x_k^{(i)}$, isto é,

$$\begin{aligned} x &= \left(\lim_{i\to\infty} x_1^{(i)}, \lim_{i\to\infty} x_2^{(i)}, \ldots, \lim_{i\to\infty} x_k^{(i)}, \ldots, \lim_{i\to\infty} x_n^{(i)}\right) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Precisamos apenas garantir que $x^{(i)} \to x$.

Sendo $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, já vimos que, para cada k fixado, $\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| < \epsilon$. Mas, pela construção do elemento $x \in \mathbb{R}^n$ que realizamos, se fizermos j tender ao infinito ficamos com $\lim\limits_{j\to\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| \leq \lim\limits_{j\to\infty} \epsilon$, donde segue que $\left|x_k^{(i)} - x_k\right| \leq \epsilon$, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Sendo assim, $\sup\limits_{1\leq k\leq n} \left|x_k^{(i)} - x_k\right| \leq \epsilon$, ou seja, $\left\|x^{(i)} - x\right\|_\infty \leq \epsilon$. Desta forma, concluimos que a seqüência $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$ e, portanto, $\mathbb{R}^n$ é de Banach com a norma $\| \ \|_\infty$.

3 Transformações Lineares Limitadas e Normas Equivalentes

Veremos agora que as transformações lineares, quando definidas entre dois espaços vetoriais normados, podem ser analisadas quanto à continuidade e/ou limitação. Além disso, definiremos quando duas normas de um espaço são equivalentes e completaremos a seção com a apresentação de alguns resultados.

Vamos primeiramente definir transformações lineares limitadas e normas equivalentes.

Definição 9. Sejam E e F espaços vetoriais munidos das normas $\| \ \|_E$ e $\| \ \|_F$ respectivamente.

Diz-se que a transformação linear $T : E \to F$ é limitada se existe uma constante real $M > 0$ tal que, qualquer que seja $x \in E$, se verifique

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Definição 10. Duas normas $\| \; \|$ e $\| \; \|'$ em E são ditas equivalentes se existem constantes positivas a e b tais que

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$$

para todo $x \in E$.

Vejamos um teorema que nos servirá também como exemplo de normas equivalentes.

Teorema 11. *Em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes.*

Prova: Seja $\| \; \|$ uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$. Mostrando que $\| \; \|$ é equivalente a $\| \; \|_\infty$ teremos como conseqüência que todas as normas de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes entre si.

Para isto basta encontrar constantes a e b positivas que satisfaçam

$$a\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq b\|x\|_\infty$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como sendo a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existem $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ e, sendo assim,

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\| \leq \|x_1e_1\| + \cdots + \|x_ne_n\| = |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\|.$$

Mas para cada $i = 1, \ldots, n$ temos que $|x_i| \leq \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ e que $\|e_i\| = 1$, já que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ trata-se da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Logo

$$\|x\| \leq |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \leq n \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$

e portanto basta tomar $b = n > 0$ e já teremos uma das desigualdades que desejamos satisfeita, isto é, $\|x\| \leq b\|x\|_\infty$.

Precisamos apenas encontrar a constante positiva a que atenda a propriedade de que $a\|x\|_\infty \leq \|x\|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Para este propósito definiremos uma função f que a cada $x \in (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ associa o valor $\|x\| \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = \|x\|$.

Observe primeiramente que a função f é lipschtiziana e portanto uniformemente contínua.

De fato, se $x, y \in (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ então

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Mas pela primeira parte desta demonstração temos que $\|x - y\| \leq b\|x - y\|_\infty$, pois $x - y$ é um elemento de $\mathbb{R}^n$. Logo

$$|f(x) - f(y)| \leq b\|x - y\|_\infty,$$

donde segue que f é lipschtiziana.

Como em $\mathbb{R}^n$ todo conjunto fechado e limitado é compacto, podemos afirmar que a esfera unitária $S[0, 1]$ definida com a $\|\ \|_\infty$ é compacta e desta forma, por f ser contínua, temos que f assume um valor mínimo em $S[0, 1]$. Seja $f(v)$ esse valor, com $v \in S[0, 1]$.

Se $x \neq 0$ temos que

$$\frac{1}{\|x\|_\infty}\|x\| = \left\|\frac{1}{\|x\|_\infty}x\right\| = f\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq f(v),$$

o que implica que $\|x\| \geq f(v)\|x\|_\infty$ para todo $x \neq 0$. Observe que esta última desigualdade é válida ainda se $x = 0$.

Como $v \in S[0, 1]$ então $v \neq 0$, logo $f(v) = \|v\| > 0$. Sendo assim, basta tomar $a = f(v)$ e teremos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $a\|x\|_\infty \leq \|x\|$, como queríamos. ■

A partir deste momento caminharemos com o objetivo de garantir que todo espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita n é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Para demonstrar tal resultado precisaremos dos lemas que seguem.

Lema 12. *Sejam E e F espaços normados e T uma transformação linear de E em F. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *T é contínua*

b) $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| < \infty$

c) *T é limitada*

Prova: **a)** $\Rightarrow$ **b)** Temos que T é contínua em cada $x_0 \in E$, inclusive na origem. Logo para todo $\epsilon > 0$, em particular para $\epsilon = 2$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| = \|x - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| < 2. \tag{1.1}$$

Se considerarmos os pontos de E em que $\|x\| \leq 1$ então a implicação 1.1 e os fatos de que $\delta > 0$ e T é linear nos garantem que

$$\begin{aligned}\|x\| \leq 1 \Rightarrow \delta\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|\delta x\| \leq \delta \Rightarrow \|T(\delta x)\| < 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\delta\, T(x)\| < 2 \Rightarrow \delta\|T(x)\| < 2 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}.\end{aligned}$$

Portanto $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| < \infty$.

b) $\Rightarrow$ **c)** Se $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| < \infty$ então existe M tal que $M = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$.

No caso em que $x = 0$ temos que $T(x) = 0$, já que T é linear. Logo

$$\|T(x)\| = 0 = M \cdot 0 = M\|x\|.$$

Analisemos agora o caso em que $x \neq 0$. Observe que

$$\|T(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|}\, T(x) \right\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|x\|\, M,$$

pois $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1$ e $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = M$.

Portanto, pela Definição 9, T é limitada.

c) $\Rightarrow$ a) Se T é uma transformação limitada então existe $A > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq A\|x\|$ para todo $x \in E$.

Usando o fato de T ser linear, para quaisquer $x, y \in E$, temos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq A\|x - y\|,$$

pois $x - y \in E$.

Portanto T é uma função lipschitziana, donde concluímos que T é uma transformação linear contínua. ■

Lema 13. *Sejam E e F espaços normados com $E \neq \{0\}$ e $T : E \to F$ uma aplicação linear sobrejetora. Então T é injetora e possui inversa contínua se, e somente se, existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq m$ para todo x pertencente a esfera $S[0, 1]$.*

Prova: Iniciemos supondo que a transformação linear sobrejetora $T : E \to F$ seja injetora e sua inversa T^{-1} seja contínua.

Pelo Lema 12 temos que se T^{-1} é contínua então T^{-1} é limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que

$$\left\|T^{-1}(y)\right\| \leq k\|y\| \tag{1.2}$$

para todo $y \in F$.

Como T é bijetora, para cada $y \in F$ existe um único $x \in E$ tal que $x = T^{-1}(y)$ ou então $T(x) = y$.

Substituindo em 1.2 temos que $\|x\| \leq k\|T(x)\|$ o que equivale a dizer que $\|T(x)\| \geq \frac{1}{k}\|x\|$ para todo $x \in E$, já que $k \neq 0$.

Em particular para $x \in S[0, 1]$ ocorre que $\|x\| = 1$ e portanto $\|T(x)\| \geq \frac{1}{k}$. Sendo assim basta tomar $m = \frac{1}{k} > 0$ (pois $k > 0$) e teremos que, para todo $x \in S[0, 1]$, $\|T(x)\| \geq m$.

Reciprocamente, vamos mostrar em primeiro lugar que T é injetora. Para isto basta certificar que o núcleo da transformação T possui apenas o elemento nulo de E, ou seja, que se $x \in E$ com $x \neq 0$ então $T(x) \neq 0$.

Seja $x \neq 0$ um elemento de E. Como $\dfrac{x}{\|x\|} \in S[0,1]$ então, por hipótese, existe $m > 0$ tal que $\left\| T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq m$, o que é equivalente a $\|T(x)\| \geq m\|x\|$.

Sendo $m > 0$ e $x \neq 0$ podemos afirmar que $m\|x\| > 0$, donde concluimos que $\|T(x)\| \neq 0$.

Desta forma ficamos com uma transformação linear T sobrejetora e injetora e, por este motivo, T admite uma aplicação inversa T^{-1}. Mostremos que T^{-1} é contínua.

Para todo $x \in E$ não nulo temos que $\dfrac{x}{\|x\|} \in S[0,1]$ e então, por hipótese, existe $m > 0$ tal que $\left\| T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq m$, ou seja,

$$\|T(x)\| \geq m\|x\|. \tag{1.3}$$

Mas observe que, por T ser linear, a desigualdade 1.3 vale também para $x = 0$. E sendo T bijetora, para cada $x \in E$ existe um único $y \in F$ tal que $y = T(x)$ ou igualmente $x = T^{-1}(y)$.

Substituindo em 1.3 tiramos que, para todo $y \in F$, $\|y\| \geq m\left\|T^{-1}(y)\right\|$ ou equivalentemente, que $\left\|T^{-1}(y)\right\| \leq \dfrac{1}{m}\|y\|$, donde concluimos que T^{-1} é limitada para todo $y \in F$ e portanto contínua. ■

E a partir destes dois lemas podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 14. *Seja $(E, \| \, \|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita n.*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to E$ definida por

$$T(x) = T(x_1, \ldots, x_n) = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de E. Então T é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em E.

Prova: Vejamos primeiramente que T é sobrejetora.

Dado $w \in E$ temos que existem constantes reais $x_1, \ldots, x_n$ tais que $w = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Logo, basta tomar $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ e então $T(x) = w$.

Como T é linear com domínio e contra-domínio de mesma dimensão n, podemos concluir que T, além de sobrejetora, é também injetora. Portanto T admite aplicação inversa T^{-1}.

Falta mostrar que T e T^{-1} são transformações contínuas.

Podemos considerar em $\mathbb{R}^n$ a norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sem perda de generalidade, pois, como vimos no Teorema 11, toda norma em $\mathbb{R}^n$ é equivalente.

Sabendo que para todo $i = 1, \ldots, n$ vale que $|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$, tiramos que

$$\begin{aligned}\|T(x)\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\| \leq |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \leq \\ \leq \|x_1\|_2\|e_1\| + \cdots + \|x_n\|_2\|e_n\| = \|x\|_2(\|e_1\| + \cdots + \|e_n\|).\end{aligned}$$

Como $M = \|e_1\| + \cdots + \|e_n\| > 0$ podemos concluir de $\|T(x)\| \leq M\|x\|_2$ que T é limitada e portanto contínua.

Para provar que T^{-1} é contínua vamos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} f : S &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|T(x)\| \end{aligned}$$

onde S representa a esfera unitária $S[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\|_2 = 1\}$.

Observe que f é a composição das funções contínuas $\| \ \|$ e T, ou seja, $f = \| \ \| \circ T$, donde segue que f é contínua. E além disso, S é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, então existe $x_0 \in S$ tal que $f(x_0) = \|T(x_0)\| = m$ é o valor mínimo de f, isto é, $\|T(x)\| \geq m$ para todo $x \in S$.

Veja que $m \geq 0$. Mais que isso, podemos afirmar que $m > 0$, pois se $m = 0$ teríamos que $\|T(x_0)\| = 0$ que equivale a $T(x_0) = 0$. Mas T é injetora, então $x_0 = 0$, o que seria absurdo porque $x_0 \in S$.

Logo, de T ser linear, sobrejetora e existir $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq m$ para todo $x \in S[0,1]$ concluimos, pelo Lema 13, que T^{-1} é contínua. ■

4 Dimensão Finita em Contraste com Dimensão Infinita

Na seção 2 vimos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. Além disso todo conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ é compacto e temos ainda, pelo Teorema 11, que em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes. Mas provamos na seção 3 que todo espaço de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sendo assim podemos concluir que estas três propriedades que $\mathbb{R}^n$ possui também valem para qualquer espaço de dimensão finita, ou seja, todo espaço finito dimensional é de Banach e neles todas as normas são equivalentes e todo conjunto fechado e limitado é compacto.

Além disso o teorema abaixo nos garantirá que toda transformação linear definida num espaço de dimensão finita é contínua.

Teorema 15. *Seja $L : E \to F$ uma aplicação linear e E de dimensão finita $n > 0$. Então L é contínua.*

Prova: Mostremos que L é limitada e então, pelo Lema 12, ela será contínua.

Sendo E um espaço de dimensão finita, podemos considerar nele, sem perda de generalidade, a seguinte norma: se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de E então para $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Por L ser linear, para todo $x \in E$ temos que:

$$\begin{aligned}
\|L(x)\| &= \|L(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)\| = \|x_1L(e_1) + \cdots + x_nL(e_n)\| \leq \\
&\leq |x_1|\|L(e_1)\| + \cdots + |x_n|\|L(e_n)\| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|\big(\|L(e_1)\| + \cdots + \|L(e_n)\|\big) = \\
&= \|x\|_\infty M,
\end{aligned}$$

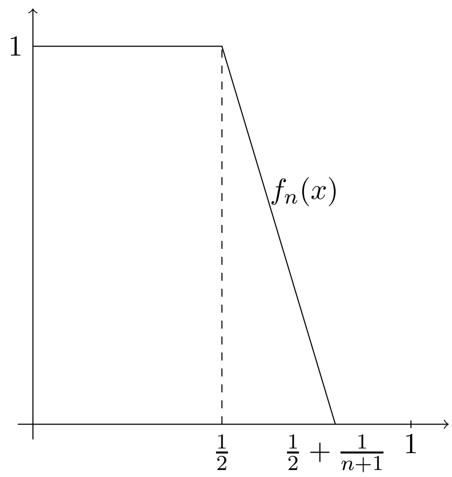
onde $M = \|L(e_1)\| + \cdots + \|L(e_n)\|$.

Portanto L é limitada como desejávamos. ■

Vimos ao longo destas notas resultados importantes em relação a espaços normados de dimensão finita. As cinco observações que seguem vêm com o intuito de alertar que alguns destes resultados não são válidos no caso em que o espaço considerado tenha dimensão infinita.

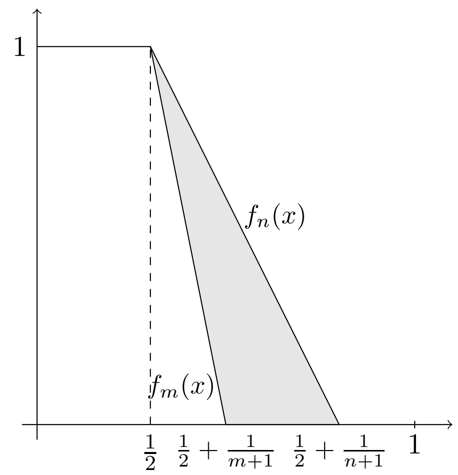
Observação 16. Observamos anteriormente que, em conseqüência do Teorema 14, todo espaço de dimensão finita é de Banach. Porém quando o espaço é de dimensão infinita, nada se pode garantir.
Como contra-exemplo vamos apresentar uma seqüência de Cauchy no espaço $C[0,1]$ munido da norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ que não é convergente e, sendo assim, concluiremos que $C[0,1]$ com esta norma não é um espaço de Banach.
Consideremos neste espaço a seqüência de funções (f_n), onde cada f_n é definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x + n\left(\frac{1}{2} - x\right), & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Esta seqüência é de Cauchy.

De fato, veja em primeiro lugar que $\|f_m - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\, dx$ dá o valor da área do triângulo de altura e base medindo respectivamente 1 e $\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right)\right|$. Veja a figura:



Sendo assim,

$$\|f_m - f_n\|_1 = \frac{1}{2}1\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|\frac{1}{m+1}\right| + \left|-\frac{1}{n+1}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, basta tomar n_0 como sendo a parte inteira do número $\frac{1}{\epsilon} - 1$ e teremos que se $n, m > n_0$ então

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow n + 1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

e

$$m > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow m + 1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{m+1} < \epsilon.$$

Desta forma podemos concluir que

$$\|f_m - f_n\|_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) = \epsilon,$$

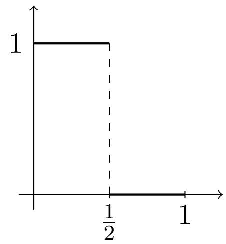
ou seja, (f_n) é uma seqüência de Cauchy.

Para verificar que (f_n) não é convergente com a norma definida, vamos supor que ela convirja para uma função $f \in C[0,1]$ e chegaremos ao absurdo de que f é igual a uma função g que não pertence a $C[0,1]$.

Considere então a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

que obviamente é descontínua em $x = \dfrac{1}{2}$ e, sendo assim, $g \notin C[0,1]$.



Da mesma forma que antes, o número $\|f_n - g\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|\, dx$ nos fornece o valor da área do triângulo de altura 1 e base $\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\right|$.

Logo

$$\|f_n - g\|_1 = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{2n+2}$$

e, como podemos ver, $\|f_n - g\|_1$ converge para zero à medida que n vai para o infinito, ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$ então $\|f_n - g\|_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Suponhamos que exista $f \in C[0,1]$ tal que $f_n \to f$ segundo a norma $\| \, \|_1$ definida. Se assim fosse, para o $\epsilon > 0$ dado existiria $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_2$ então $\|f_n - f\|_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se $n > n_0$ teríamos que

$$\|f-g\|_1 = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-g(x)|\,dx \leq$$
$$\leq \int_0^1 |f(x)-f_n(x)|\,dx + \int_0^1 |f_n(x)-g(x)|\,dx =$$
$$= \|f_n - f\|_1 + \|f_n - g\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto é impossível, pois f é contínua. Portanto não existe $f \in C[0,1]$ tal que (f_n) convirja pra f.

Observação 17. O Teorema 15 nos garante que toda transformação linear definida num espaço de dimensão finita é contínua. Mas no caso em que o domínio da aplicação é um espaço de dimensão infinita, este resultado não é válido.

Veremos a seguir um exemplo de uma transformação linear não contínua, cujo domínio será o subespaço vetorial $C^1[0,1]$ das funções reais contínuas no intervalo $[0,1]$ com primeira derivada também contínua em $[0,1]$.

Vamos munir os espaços vetoriais $E = C^1[0,1]$ e $F = C[0,1]$ da norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Considere a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} T : E &\to F \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

onde f' denota a derivada da função f.

Temos que T é linear.

De fato, sejam $f, g \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

$$T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$$

e

$$T(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda T(f).$$

Porém T não é uma função contínua. Para verificar este fato utilizaremos o Lema 12, mostrando que o $\sup\limits_{\|f\|_\infty \leq 1} \|T(f)\|_\infty$ não existe.

Tomemos então as funções $f_n \in E$ definidas por $f_n(x) = x^n$. Temos que $T(f_n)(x) = nx^{n-1}$.

Observe que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1,$$

mas

$$\|T(f_n)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |T(f_n)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|nx^{n-1}\right| = n.$$

Logo não existe uma constante M que limita os valores de $\|T(f_n)\|_\infty$ para $f_n \in E$ tais que $\|f_n\|_\infty = 1$, ou seja, $\sup\limits_{\|f\|_\infty \leq 1} \|T(f)\|_\infty$ não existe. Sendo assim, T não é contínua.

Observação 18. Novamente como conseqüência do Teorema 14 observamos que num espaço de dimensão finita todo conjunto fechado e limitado é compacto. Já num espaço de dimensão infinita isso nem sempre é verdadeiro.
Considere

$$E = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \ / \ x_k \in \mathbb{R} \text{ e } x_k = 0, \text{ exceto para um número finito de índices}\}$$

um subespaço de $l_\infty(\mathbb{N})$ (o espaço $l_\infty(\mathbb{N})$ foi apresentado no Exemplo 6).
Apresentemos então um conjunto de E que, apesar de fechado e limitado, não é compacto. Este conjunto será a esfera unitária S centrada na origem:

$$S = \left\{x \in E \ / \ \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = 1\right\}.$$

É claro que S é limitada.
Para perceber que S é fechada considere a função:

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

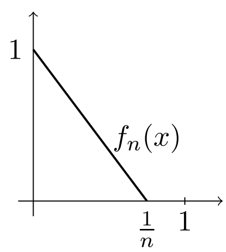
Temos que $\{1\}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$, logo $f^{-1}(\{1\}) = S$ é um conjunto fechado de E, já que f é uma função contínua.
Entretanto a seqüência em S definida por

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\
x_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\
x_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots \\
x_n &= (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

não admite subseqüência convergente. Portanto S não é compacta.

Observação 19. Num espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Vejamos um exemplo de espaço normado de dimensão infinita em que isto não ocorre.
Considere no espaço $C[0,1]$ a seqüência de funções:

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Mostraremos que em $C[0,1]$ com a norma $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, mas que munido da norma $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ a mesma

seqüência não converge. Desta forma poderemos concluir que as normas $\| \|_1$ e $\| \|_\infty$ em $C[0,1]$ não são equivalentes.
Vejamos primeiramente que com a norma $\| \|_1$ a seqüência converge para a função nula que denotaremos por 0.
Dado $\epsilon > 0$ basta tomar n_0 como sendo a parte inteira do número $\dfrac{1}{\epsilon}$ e então se $n > n_0$ teremos que

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 |(f_n - 0)(x)|\, dx = \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{n} < \epsilon,$$

já que $\int_0^1 |f(x)|\, dx$ é o valor da área do triângulo de base $\dfrac{1}{n}$ e altura 1.
No entanto se a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergisse com a norma $\| \|_\infty$ então existiria $g \in C[0,1]$ tal que $f_n \to g$ uniformemente. Mas neste caso teríamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para g pontualmente, o que é um absurdo, pois o limite pontual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a função:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

que por sua vez não pertence a $C[0,1]$.

Observação 20. Temos ainda um resultado importante na Álgebra Linear que diz: se E é um subespaço vetorial de dimensão finita então $(E^\perp)^\perp = E$, onde $E^\perp$ denota o subespaço ortogonal a E. Mas quando o subespaço possui dimensão infinita esta igualdade pode não valer.

Como contra-exemplo considere novamente o conjunto

$$E = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;/\; x_k \in \mathbb{R} \text{ e } x_k = 0, \text{ exceto para um número finito de índices}\},$$

porém visto agora como subespaço de $l_2(\mathbb{N})$ (o espaço $l_2(\mathbb{N})$ foi apresentado no Exemplo 5).

Para falar em ortogonalidade é necessário primeiramente definir um produto interno em E. Considere o seguinte: se (a_i) e (b_i) são seqüências de E definimos

$$\langle (a_i), (b_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i.$$

Temos que os elementos da base

$$\{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),\ldots,(0,0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots),\ldots\}$$

de $l_2(\mathbb{N})$ pertencem a E, pois suas coordenadas são não nulas apenas para um índice.

Sendo assim todo elemento que pertence a $E^\perp$ é ortogonal a base de $l_2(\mathbb{N})$, donde segue que o único elemento de $E^\perp$ é o vetor nulo. Mas o vetor nulo é ortogonal a todo vetor, logo $(E^\perp)^\perp = l_2(\mathbb{N}) \neq E$.

Abstract: In this work we present some results for finite dimensional spaces and give some examples in infinite dimensional spaces that are in contrast with these results.

Keywords: Normed linear spaces, finite dimensional, infinite dimensional, Banach space, continuous linear map, bounded linear map, closed set, bounded set, compact set, ortogonal subspace, equivalent norms.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G., *Introdução à Análise Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda.

[2] Lima, E.L., *Análise Real Funções de uma Variável*, Volume I, Coleção Matemática Universitária.

[3] Bertolo, N. e Baroni, R.L.S., *Introdução à Análise Funcional.*

[4] Nachbin, L., *Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial.*

O Teorema de Baire e o Conjunto de Cantor

Nivaldo de Góes Grulha Júnior[1]
Orientador(a): Wagner Vieira Leite Nunes

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar um problema interessante relacionado com o conjunto de Cantor. A pergunta que queremos responder aqui é a seguinte: Dado K o conjunto de Cantor ternário, será que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + K \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Veremos aqui que com o teorema de Baire a resposta segue naturalmente.

Palavras-chave: Conjunto de Cantor; Teorema de Baire.

1 Algumas propriedades

Introduziremos aqui algumas propriedades topológicas que são importantes para compreender o conjunto de Cantor - incentivo o leitor a procurar exemplos de conjuntos com essas propriedades abaixo - depois exemplos que possuam duas ou três ao mesmo tempo, o leitor perceberá então a importância de termos "na manga" sempre o conjunto de Cantor como um bom exemplo.

Trabalharemos aqui sempre com a métrica usual da reta, ou seja, a métrica

$$d(x, y) = |x - y|,$$

para o leitor mais familiarizado com a terminologia, podemos dizer que sempre trabalharemos com a topologia da reta induzida pela métrica usual.

A topologia é o estudo das propriedades de um espaço que em geral estão ligadas ao estudo das funções contínuas definidas no mesmo (ver [5]). O estudo da topologia da reta é um estudo fundamental, a reta é o espaço topológico mais freqüentemente usado, tanto como objeto de estudo como também como fonte de bons exemplos.

[1]Trabalho de Iniciação Científica. Doutorando em matemática do ICMC-USP/São Carlos. E-mail: `njunior@icmc.usp.br`

Para o leitor interessado, sugerimos [3] para um estudo mais aprofundado deste assunto.

Iniciaremos com algumas definições básicas.

Definição 1. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ chama-se *ponto interior de* A quando existe um intervalo aberto $(a, b) \subset A$ tal que $x \in (a, b)$.

Exemplo 2. Consideremos o intervalo $I = [-1, 1]$. O ponto 0 é um ponto interior de I, pois $0 \in (-1/2, 1/2)$.

Definição 3. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Definimos o conjunto interior de A, denotado por $\mathrm{Int}(A)$, como o conjunto dos pontos interiores de A.

Exemplo 4. Consideremos o mesmo intervalo $I = [-1, 1]$. Claramente vemos que -1 e 1 não podem ser pontos interiores, entretanto, qualquer outro ponto de I está contido no intervalo $(-1, 1)$. Logo $\mathrm{Int}([-1, 1]) = (-1, 1)$.

Definição 5. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, se $A = \mathrm{Int}(A)$.

Exemplo 6. Todo intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. Convidamos o leitor a completar este raciocínio.

Definição 7. Dizemos que um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado se $\mathbb{R} \setminus F$ for um conjunto aberto.

Uma propriedade muito importante na topologia é a compacidade. Esta propriedade é importante em vários ramos da Matemática. Descobrir que o espaço em que estamos trabalhando é um espaço compacto pode facilitar muito nossa vida. Para introduzirmos conjuntos compactos definiremos primeiramente o conceito de cobertura de um conjunto, esta definição não se limita ao caso da reta, estas definições podem ser usadas em casos extremamente gerais.

Definição 8. Uma cobertura de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é uma família $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de subconjuntos $U_\alpha \subset \mathbb{R}$, tais que $A \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, isto é, para todo $x \in A$ existe um $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$.

Exemplo 9. Se considerarmos todos os intervalos da forma $I_n = (-n, n)$ na reta, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura da reta.

Definição 10. Uma sub-cobertura de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma subfamília $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$, com $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que ainda se tem $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} U_\alpha$.

Exemplo 11. Se considerarmos os mesmo intervalos $I_n = (-n, n)$ como acima, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma cobertura do intervalo $[-\pi, \pi)$, entretanto, não precisamos de todos estes abertos para cobrir este conjunto, tomando $n = 4$ temos que $[-\pi, \pi) \subset (-4, 4)$, ou seja $\{I_4\}$ é uma sub-cobertura para $[-\pi, \pi)$.

Definição 12. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se, dada qualquer cobertura aberta de A, existe uma sub-cobertura finita .

Esta definição é mais utilizada para mostrar conjuntos que não são compactos, pois se você encontrar uma cobertura aberta para seu conjunto, de tal forma que esta cobertura não admita uma sub-cobertura finita, então seu conjunto não é compacto.

Um contra-exemplo clássico é a propria reta. Se considerarmos a cobertura que foi dada nos exemplos acima, $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $I_n = (-n, n)$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura da reta, mas não conseguimos uma sub-cobertura finita a partir desta.

Um teorema muito conhecido em Analíse na reta, que vai nos dar a possibilidade de encontrarmos exemplos facilmente, é o seguinte.

Teorema 13. *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a topologia induzida pela métrica usual. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Desta forma podemos obter facilmente vários exemplos de conjuntos compactos na reta, como por exemplo, qualquer intervalo $[a, b]$ com a e b números reais.

2 O Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor (ou poeira de Cantor) ternário, denotado aqui por K, é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$, fechado, sem pontos isolados, compacto e não enumerável. Este conjunto é obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada intervalo restante $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

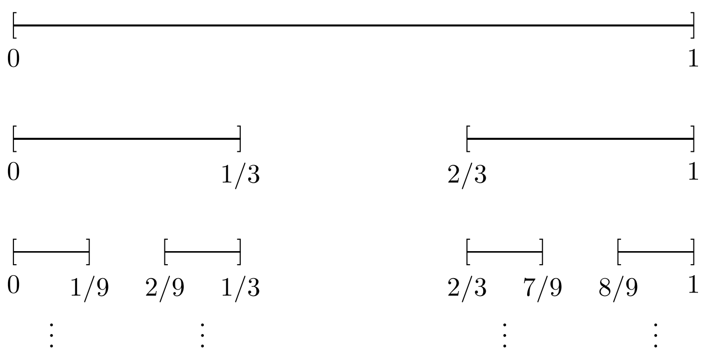


Figura 1.1: Construção do conjunto de Cantor ternário.

Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, por construção temos $K = [0, 1] \setminus \cup I_n$, isto é, $K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \cup I_n)$. Podemos então definir formalmente K da seguinte forma:

Definição 14. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos obtidos na construção acima. Definimos o conjunto de Cantor K como sendo,

$$K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \cup I_n).$$

Da definição 14, temos já a primeira propriedade: K é um conjunto fechado, pois é intersecção de dois conjuntos fechados. Note que os pontos extremos dos intervalos omitidos, como $1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, \ldots$ pertencem ao conjunto K. Com efeito, em cada etapa da construção do conjunto de Cantor são retirados apenas pontos interiores nos intervalos restantes da etapa anterior.

Sendo assim, K é um conjunto compacto, pois é um conjunto fechado e limitado na reta com a topologia usual.

Uma propriedade interessante é o fato do interior de K, denotado aqui por $\mathrm{Int}(K)$, ser um conjunto vazio. Esta propriedade também é verificada facilmente. Supondo que exista x_0 no interior de K, podemos concluir também que existe um interval $I_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ contido em $\mathrm{Int}(K)$, para ε suficientemente pequeno. Entretanto, como $1/3^n$ é uma seqüência que converge para 0, existe N_0 tal que $2\varepsilon > 1/3^{N_0}$, ou seja, temos que já no N_0-ésimo passo da construção do conjunto de Cantor, I_ε não pode pertencer a nenhum dos intervalos nesta etapa.

Definição 15. Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o *conjunto das partes* do conjunto dos números naturais. Dizemos que um conjunto A é *não-enumerável* se existe função injetora de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ em A.

O conjunto de Cantor ser não-enumerável é uma propriedade muito importante e muitas vezes surpreendente. Uma forma de provar esta propriedade é observar que os elementos do conjunto de Cantor tem uma correspondência com o conjunto das seqüências formadas por 0 e 1, muitas vezes denotado por $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

É um resultado bem conhecido e um ótimo exercício provar que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é um conjunto não enumerável.

Definição 16. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *perfeito* se: (i) é fechado (ii) todos os seus pontos são pontos limites, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$ tem infinitos pontos.

O conjunto de Cantor também tem esta propriedade. A demonstração pode ser encontrada em [1].

Definição 17. Dizemos que um subconjunto A dos reais tem *medida nula* se dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos fechados $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e $\sum_{i=1}^{n} |F_i| < \varepsilon$, onde $|F_i|$ denota o comprimento do intervalo.

O conjunto de Cantor é claramente de medida nula, a partir de sua própria construção.

Não é fácil encontrar um conjunto que reúna todas estas propriedades tão importantes ao mesmo tempo, por isso este é um exemplo tão importante e intrigante na Matemática.

Uma função Lipschitz contínua é um critério de suavidade mais forte que a condição de continuidade uniforme (logo, de continuidade). O nome tem origem no matemático alemão Rudolf Otto Sigismund Lipschitz.

Definição 18. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *Lipschitz contínua* se existe $k > 0$ tal que $|f(x) - (y)| \leq k|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 19. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua e $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto de medida nula. Então o conjunto $f(A)$ também tem medida nula.*

Prova: Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos fechados $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e $\sum_{i=1}^{n} |F_i| < \varepsilon$.

É fácil ver que $f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$, mas como f é uma função Lipschitz contínua, $f(F_i)$ também é um intervalo fechado (até aqui basta contínua, ver [3]), e mais ainda, $|f(F_i)| \leq k|F_i|$ (aqui sim precisamos f Lipschitz).

Desta forma temos $f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ e $\sum_{i=1}^{n} |f(F_i)| < k|F_i| < k\varepsilon$. Como k é um número real fixo, segue o teorema. ■

O teorema acima diz que uma função Lipschitz contínua preserva a propriedade de medida nula, no seguinte sentido: a imagem de um conjunto de medida nula por uma função Lipschitz contínua também tem medida nula (para maiores detalhes, ver [2, 4]).

A translação $T_x(v) = x+v$ é uma função Lipschitz contínua. Logo, $T_x(K) \doteq K_x$ é um conjunto de medida nula. Mas como todo conjunto de medida nula tem interior vazio, temos que K_x tem interior vazio e como K é compacto e T_x contínua, temos K_x compacto, logo fechado.

3 Atacando o Problema

O teorema que vou apresentar agora é válido em um contexto mais geral, na verdade é uma propriedade dos espaços métricos completos, mas adaptando para o nosso contexto vamos enunciá-lo da seguinte forma.

Teorema 20 (Teorema de Baire Simplificado). *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não pode ser escrito como uma reunião enumerável de fechados com interior vazio, ou seja, se $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ então existe n_0 tal que F_{n_0} não tem interior vazio.*

Prova: Suponhamos por absurdo que possamos escrever $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n seja uma conjunto fechado com interior vazio. Seja I_1 um intervalo. Como F_1 tem interior vazio temos que $I_1 \cap F_1$ é diferente do vazio, logo podemos supor que existe I_2 intervalo, tal que $\overline{I_2} \subset I_1 \cap F_1$. Analogamente ao caso anterior, como F_2 tem interior vazio, temos que $I_2 \cap F_2$ também é um conjunto diferente do vazio, logo, podemos supor que existe I_3 intervalo, tal que $\overline{I_3} \subset I_2 \cap F_2$. Desta forma, por indução obtemos uma família $\{\overline{I_n}\}$ de fechados encaixantes, não vazios, ou seja, $\bigcap \overline{I_n}$ é um conjunto não vazio, entretanto, por construção $\bigcap \overline{I_n}$ não está contido em $\bigcup F_n$, mas $\bigcup F_n = \mathbb{R}$. Absurdo, de onde segue o resultado. ■

Usaremos este resultado para provar nosso teorema principal, que descreveremos a seguir.

Teorema 21. *Seja K o conjunto de Cantor ternário. Então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + K = T_x(K) = K_x \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Prova: Suponhamos por absurdo que o conjunto $K_x \cap \mathbb{Q}$ seja diferente do vazio, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Desta forma existe $y_x \in \mathbb{Q}$ tal que $x - y_x \in \mathbb{Q}$, ou seja, $x - y_x = c \in K$. Assim temos $x \in (-y_x) + K$, portanto podemos escrever o conjunto dos números reais da seguinte forma:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} x \subset \bigcup_{y_x} [(-y_x) + K] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} q + K.$$

Desta forma obtemos

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} K_q.$$

Mas esta afirmação contradiz o teorema de Baire enunciado acima, absurdo. Portanto o conjunto $K_x \cap \mathbb{Q}$ é um conjunto vazio, de onde obtemos a afirmação do teorema. ∎

Mas ainda fica aqui uma pergunta: *podemos explicitar x que satisfaça essa condição?* É claro que esse x não é único e também é claro que ele não é racional, mas ainda fica a pergunta: que elemento satisfaz essa condição?

Abstract: The goal of this work is to present a interesting problem related to the Cantor's set. The question we want to answer here is the following: Given K the Cantor's set, there exist $x \in \mathbb{R}$ such that $x + K \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? We will see here that with the Baire's theorem the answer follows trivially.

Keywords: Cantor's set; Baire's theorem.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, E.L., *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2001.

[2] James R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[3] Lima, E.L., *Curso de Análise Vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, 1994.

[4] Lima, E.L., *Curso de Análise Vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[5] Lima, E.L., *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico, 1970.

Sobre Classificação de Superfícies Compactas Sem Bordo

Thaís Fernanda Mendes Monis[1]
Orientador(a): Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Resumo: Na Topologia há dois aspectos importantes a se considerar: extensão de funções e classificação de espaços topológicos. Esse último é feito mediante o uso de objetos chamados invariantes topológicos, ou seja, objetos que são preservados por homeomorfismo – função bijetora, contínua, com inversa contínua. Nesse trabalho, apresentamos uma classificação das superfícies compactas sem bordo usando como invariante topológico a característica de Euler das superfícies.

Palavras-chave: Superfície, característica de Euler, triangulação de superfície.

1 Introdução

Uma superfície compacta sem bordo, ou simplesmente superfície fechada, é um espaço topológico compacto, de Hausdorff e conexo no qual cada um de seus pontos possui uma vizinhança aberta homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Alguns exemplos de superfícies compactas sem bordo são: a esfera, o toro, o plano projetivo e a garrafa de Klein.

Dadas duas superfícies fechadas, obtemos uma terceira por um processo chamado de soma conexa que, intuitivamente, consiste em retirar um pequeno disco aberto de cada uma das superfícies e depois grudá-las por um tubo.

Um primeiro resultado de classificação das superfícies compactas sem bordo diz que uma superfície fechada só pode ser uma esfera, um toro, um plano projetivo ou obtida a partir dessas três superfícies fechadas básicas por soma conexa. Formalmente:

[1]Bolsista FAPESP - Processo 03/13273-3

Teorema 1. *Toda superfície compacta sem bordo S é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de toros ou à soma conexa de planos projetivos.*

Conhecendo todas as superfícies fechadas existentes, interessa-nos reconhecer quando duas delas são homeomorfas ou não.

O conceito de característica de Euler surge na matemática elementar com o estudo de poliedros, onde se verifica que em certos poliedros, por exemplo poliedros convexos, com V vértices, A arestas e F faces, tem-se a relação $V - A + F = 2$. Mais geralmente, dado um poliedro P tendo V vértices, A arestas e F faces, associamos a ele o número $V - A + F$, chamado de característica ou número de Euler do poliedro P. A generalização desse conceito para superfícies quaisquer é feita através de uma outra ferramenta chamada triangulação de superfícies.

Uma triangulação de uma superfície compacta S consiste de uma família de subconjuntos $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ que cobrem S e uma família de homeomorfismos $\varphi_i : T_i{}' \to T_i, i = 1, \ldots, n$, onde cada $T_i{}'$ é um triângulo do plano $\mathbb{R}^2$. Os subconjuntos T_i são chamados triângulos. Também, os subconjuntos de T_i que são imagem de algum vértices do triângulo $T_i{}'$ pela φ_i são chamados vértices de T_i e os subconjuntos de T_i que são imagem de alguma aresta de $T_i{}'$ pela φ_i são chamados arestas de $T_i{}'$. Finalmente, exigimos que cada dois triângulos T_i e T_j distintos sejam ou disjuntos ou tenham um único vértice em comum ou tenham uma única aresta em comum.

Por exemplo, como a esfera é homeomorfa ao tetraedro, podemos considerar ele próprio como sendo uma triangulação para a esfera. Nessa triangulação temos $V = 4$ vértices, $A = 6$ arestas e $F = 4$ faces e, como mencionado anteriormente, $V - A + F = 2$.

Em 1925, T. Radó demonstrou que toda superfície compacta admite triangulação.

Seja M uma superfície compacta com triangulação $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ e sejam

$$\begin{array}{rcl} v & = & \text{número total de vértices de } M \\ t & = & \text{número total de triângulos de } M \\ e & = & \text{número total de arestas de } M \end{array}$$

Com essa notação, o invariante numérico

$$\chi(M) = v - e + t$$

é chamado a *característica de Euler* de M.

Observamos que a característica de Euler de uma superfície compacta sem bordo depende apenas da superfície e não da triangulação, ou seja, o número definido acima é de fato um invariante numérico.

Proposição 2. *Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas. A característica de Euler da soma conexa de S_1 e S_2, $S_1 \# S_2$, é dada por*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

A característica de Euler da esfera, do toro e do plano projetivo é 2, 0 e 1, respectivamente.

Em vista do teorema 1 e da proposição 2, podemos determinar a característica de Euler de todas as superfícies compactas sem bordo possíveis:

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de n toros	$2 - 2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de 1 plano projetivo e n toros	$1 - 2n$
Soma conexa de 1 garrafa de Klein e n toros	$-2n$

Estamos agora em condições de classificar completamente as superfícies compactas sem bordo, separando-as segundo sua característica de Euler e sua orientabilidade.

Teorema 3. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. Então, S_1 e S_2 são homeomorfas se, e somente se, suas características de Euler são iguais e ambas são orientáveis ou ambas são não orientáveis.*

Um dos aspectos importantes desse resultado reside no fato de ser muito rara uma classificação completa de classes de espaços topológicos quaisquer. Para 4-variedades, por exemplo, é demonstrada a impossibilidade de um resultado de tal natureza. Em 1904, H. Poincaré conjeturou que toda 3-variedade fechada simplesmente conexa é homeomorfa à 3-esfera. A conjectura de Poincaré em sua forma original foi generalizada para a forma: "toda n-variedade compacta é homeomorfa à n-esfera se, e somente se, é homotopicamente equivalente à n-esfera". O caso $n = 1$ é trivial e o caso em que $n = 2$ é um resultado clássico conhecido desde o século XIX. A demonstração para $n = 4$ foi dada por Freedman em 1982. Em 1961, Smale provou a conjectura para $n \geq 5$. G. Perelman apresentou uma demonstração para o caso em que $n = 3$, isto é, a conjectura de Poincaré em sua forma original. A comunidade matemática a aceitou, porém ainda não foi publicada.

Abstract: There are two characteristic problems of topology: extensions of functions and classifying topological spaces. Classification results are obtained by topological invariants. In this work, we present a complete classification of closed surfaces. The topological invariant Euler characteristics of surfaces will be used.

Keywords: Surfaces, Euler characteristics, triangulation.

Referências Bibliográficas

[1] Armstrong, M.A., *Basic Topology*, Springer-Verlag, 1983.

[2] Kosniowski, C., *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, 1980.

Uma Introdução ao Estudo de Equações de Diferenças e sua Utilização no Ensino Médio

Vagner Rodrigues de Moraes[1]

Orientador(a): Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Resumo: Neste trabalho, estudamos alguns tipos de equações de diferenças, com relação à solução (quando possível) e estabilidade de pontos de equilíbrio, além de alguns modelos de dinâmica populacional e finanças que fazem uso das mesmas. Paralelamente, propomos algumas atividades a serem realizadas a nível de Ensino Médio que poderiam ser utilizadas como motivação para o ensino de exponenciais, logaritmos e progressões.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Equações de Diferenças, Estabilidade.

1 Introdução

A modelagem pode ser usada tanto como objeto de pesquisa quanto no processo de ensino-aprendizagem ([1]). Na pesquisa, esta aparece em várias áreas tais como Biologia, Física, Química e também em áreas sociais como Economia e Geografia. Na aprendizagem, principalmente em salas de aula, o processo de modelagem com fatos cotidianos tem despertado um maior interesse dos alunos em aprender determinados conteúdos matemáticos, mostrando também a importância de se aprender Matemática para o convívio em sociedade.

É muito freqüente, quando pretendemos modelar um determinado fenômeno, nos depararmos com equações que envolvam "variações" de certas quantidades consideradas essenciais. O uso de equações diferenciais ou de diferenças para representar essas variações corresponde, essencialmente, ao fato do fenômeno estudado ser visto em tempo discreto ou contínuo. Diante disto, as equações de diferenças (e diferenciais) se tornam uma das ferramentas de Análise indispen-

[1]Bolsista CNPq/2006. E-mail: `vvagnerr@universiabrasil.net`

sáveis em áreas como Física, Química, Biologia, dentre outras ([2]).

Apresentamos aqui um estudo inicial sobre sistemas dinâmicos discretos, com relação à pontos de equilíbrio e estabilidade e propomos também algumas atividades a serem desenvolvidos no Ensino Médio como motivação para o estudo de exponenciais, logaritmos e progressões.

2 Introdução a Sistemas Dinâmicos Discretos

Modelar usando um sistema dinâmico discreto é modelar um fenômeno que varia com o tempo, que é considerado de forma discreta. Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1. Suponha que um banco paga àquele que aplicar uma certa quantia em dinheiro numa poupança, uma taxa de 5% ao ano.

Considere inicialmente uma quantia de R$ 1000,00. Então no próximo ano teremos R$ 1050,00, no segundo ano R$ 1102,50 e assim sucessivamente. Observe que no segundo ano foi calculado 5% da quantia no ano anterior, ou seja, 5% de R$ 1050,00. Vamos considerar $A(n)$ a quantia na conta no ano n. Tomando $A(0)$ como sendo o depósito inicial para abertura da conta poupança, ou seja, $A(0) = 1000$, temos $A(1) = 1050$ e $A(2) = 1102,5$. Notemos que

$$A(1) = A(0) + 0,05A(0) \Rightarrow A(1) = (1,05)A(0) \tag{1.1}$$

$$A(2) = A(1) + 0,05A(1) \Rightarrow A(2) = (1,05)^2A(0) \tag{1.2}$$

Se quisermos saber a quantia que teremos no ano $(n+1)$, então teremos o seguinte sistema:

$$A(n+1) = (1,05)A(n). \tag{1.3}$$

Olhando para os cálculos acima, estes nos "induz" a seguinte solução:

$$A(k) = (1,05)^kA(0). \tag{1.4}$$

Podemos mostrar, usando o Princípio de Indução Finita, que (1.4) é solução de (1.3).

Generalizando este problema, poderíamos chamar a taxa de juros de $I\%$ e então teríamos que

$$A(n+1) = (1+I)A(n), \tag{1.5}$$

e, como solução,

$$A(k) = (1+I)^k A(0). \tag{1.6}$$

Observemos que, para sabermos a quantia em um certo tempo k, temos necessariamente que saber a quantia inicial depositada na poupança.

Exemplo 2. Suponha que uma pessoa toma uma pílula com 200mg de uma droga a cada 4 horas e que a droga vai para a corrente sangüínea imediatamente. Também assumimos que a cada 4 horas o corpo elimina 20% da droga que estava no sangue. Para um sistema dinâmico que descreve a quantia $A(n)$ (em mg) da droga na corrente sangüínea depois da n-ésima pílula, deve-se observar que:

1. Quando a medicação começa a ser utilizada temos 200mg da droga na corrente sangüínea, ou seja, $A(0) = 200$.

2. Depois de 4 horas, teremos a quantia que havia inicialmente menos 20% dessa quantia e uma nova dose dessa medicação é tomada, ou seja, $A(1) = A(0) - 0,2A(0) + 200$. Seguindo outra linha de raciocínio, temos, então, que no período $n+1$ a dosagem dessa substância presente na corrente sangüínea em função de A(n) é dada por:

$$A(n+1) = A(n) - 0,2A(n) + 200 \Rightarrow A(n+1) = 0,8A(n) + 200. \tag{1.7}$$

Vejamos agora algumas definições.

Definição 3. Suponha que temos uma função $y = f(x)$. Um sistema dinâmico discreto de primeira ordem é uma seqüência de números $A(n)$, para $n = 0, 1, \ldots$ tais que cada número depois do primeiro é encontrado pela relação recursiva

$$A(n+1) = f(A(n)).$$

A seqüência de números dados pela relação

$$A(n+1) - A(n) = g(A(n)),$$

onde $f(x) = g(x) + x$ é chamada de **Equação de Diferenças de Primeira Ordem**.

Quando o gráfico de $y = f(x)$ é uma reta passando pela origem, então dizemos que $A(n+1) = f(A(n))$ é um sistema dinâmico linear. Porém, se tivermos um sistema do tipo

$$A(n+1) = f(A(n)) + g(n)$$

como, por exemplo, $A(n+5) = A(n) - 5n^2 + 2$, este é chamado de sistema linear não homogêneo. Mas, um sistema do tipo $A(n+1) = A^3(n) + n^3 + 4$ é chamado de **sistema não linear e não homogêneo**.

Definição 4. Um sistema dinâmico da forma

$$A(n+m) = f(A(n+m-1), A(n+m-2), \ldots, A(n)) \tag{1.8}$$

onde m é um número inteiro positivo é chamado de sistema dinâmico de ordem m, já que este sistema depende de m condições iniciais para ser calculado.

Se tivermos duas ou mais seqüências $A(n)$ e $B(n)$, $n = 0, 1, \ldots$ e $A(n+1) = f(A(n), B(n))$ e $B(n+1) = g(A(n), B(n))$, então temos um sistema dinâmico de duas equações. Tais sistemas são usados, por exemplo, para estudo de competição entre duas espécies.

3 Valores de Equilíbrio

Definição 5. Considere um sistema dinâmico de primeira ordem

$$A(n+1) = f(A(n)). \tag{1.9}$$

Um número a é chamado valor de equilíbrio para este sistema se $A(k+1) = A(k) = a$, para todo k, ou seja, $A(k) = a$ é uma solução constante para o sistema dinâmico.

Teorema 6. *O número a é um valor de equilíbrio para o sistema dinâmico* $A(n+1) = f(A(n))$ *se, e somente se,* $a = f(a)$.

Prova: Imediata. ∎

Encontrando o valor de equilíbrio para $A(n+1) = (1,01)A(n) - 100$, teremos $a = 10000$. Notemos que $A(n+1) = (1,01)A(n) - 100$ é da forma:

$$A(n+1) = rA(n) + b, \tag{1.10}$$

onde r e b são constantes.

Encontrando o valor de equilíbrio da equação acima, temos:

$$a = \frac{b}{1-r}, \ r \neq 1. \tag{1.11}$$

Definição 7. Suponha que um sistema dinâmico de primeira ordem possua um valor de equilíbrio a. Este valor de equilíbrio é **estável**, ou atrator, se existe $\epsilon > 0$, único para cada sistema, tal que

$$|A(k) - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A(k) = a.$$

Um valor de equilíbrio é **instável**, ou repulsor, se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < |A(0) - a| < \epsilon \Rightarrow |A(k) - a| > \epsilon.$$

O teorema a seguir nos dá uma ferramenta para sabermos se um ponto de equilíbrio, para um sistema dinâmico afim, é repulsivo ou atrator, sem precisar calcular vários valores do sistema.

Teorema 8. *O valor de equilíbrio* $a = \dfrac{b}{1-r}$ *para o sistema dinâmico*

$$A(n+1) = rA(n) + b, \ r \neq 1 \tag{1.12}$$

é estável se $|r| < 1$*, ou seja,*

$$\lim_{k\to\infty} A(k) = a$$

para todo $A(0)$*. Se* $|r| > 1$ *então a é instável e* $|A(k)| \to \infty$ *para qualquer valor de* $A(0) \neq a$*. Quando* $r = -1$*, temos o que é conhecido como 2-ciclo.*

Prova: Observe que

$$|A(1) - a| = \left| rA(0) + b - \frac{b}{1-r} \right| = \left| rA(0) + \frac{b - rb - b}{1-r} \right| =$$

$$= \left| rA(0) - \frac{rb}{1-r} \right| = |r||A(0) - a|.$$

Similarmente, temos

$$|A(2) - a| = |r|^2 |A(0) - a|.$$

Por indução, temos que

$$|A(k) - a| = |r|^k |A(0) - a|.$$

Se $|r| < 1$ então

$$\lim_{k\to\infty} |r|^k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} |A(0) - a| = 0.$$

Logo, a é estável.

Se $|r| > 1$ então $|r|^k \to \infty$ e $|A(0) - a| \to \infty$. Isso significa que $A(k)$ está se distanciando de a. Segue que a é instável.

Se $r = -1$ então $A(n+2) = A(n)$. ∎

Suponha agora que temos um sistema $A(n+1) = f(A(n))$. A reta tangente a curva $y = f(x)$ tem inclinação $f'(a)$ e passa pelos pontos (a, a). Desta forma, esta reta tem a seguinte expressão:

$$y = rx + b, \quad \text{onde } r = f'(a) \text{ e } b = 1 - f'(a).$$

A reta tangente corresponde a um sistema linear de primeira ordem e o Teorema 8 nos fornece condições para que se tenha pontos de equilíbrio estáveis ou instáveis.

Teorema 9. *Suponha que a é um valor de equilíbrio para o sistema dinâmico*

$$A(n+1) = f(A(n)). \tag{1.13}$$

O valor de equilíbrio a é estável ou atrator se $|f'(a)| < 1$ e é instável ou repulsor se $|f'(a)| > 1$. Se $|f'(a)| = 1$, o teste é inconclusivo.

Prova: Ver [3]. ■

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 10. Consideremos o seguinte sistema dinâmico

$$A(n+1) = A^2(n) - 2A(n) - 1.$$

Neste caso $f(x) = x^2 - 2x - 1$ e $f'(x) = 2x - 2$. Sabemos que $x = 1$ é o único ponto de equilíbrio do sistema acima e também que $f'(1) = 0$. Logo, pelo Teorema 9, concluímos que o ponto de equilíbrio é estável.

Exemplo 11. Tomemos o sistema dinâmico

$$A(n+1) = A^3(n) - A^2(n) + 1.$$

Observe que $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ e $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Sabemos que $x = \pm 1$ são pontos de equilíbrio do sistema dado e que $f'(-1) = 4$ e também que $f'(1) = 1$. Neste último caso, derivadas de ordem superior são necessárias para decidir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 1$.

4 Cobwebs

Como no exemplo anterior, quando $f'(1) = 1$, não podemos afirmar nada sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio. Um método gráfico poderia ser utilizado para nos dar uma idéia do que ocorre com o ponto de equilíbrio.

Cobweb é uma ferramenta gráfica que nos ajuda a observar o comportamento do sistema dinâmico que está sendo estudado e entender seus respectivos pontos fixos.

Definição 12. Suponha que o sistema dinâmico $A(n+1) = f(A(n))$, com $A(0)$ dado. Desenhe um gráfico da curva $y = f(x)$ e a linha $y = x$. Escolha o primeiro valor de $A(0)$ e vá verticalmente para um ponto na curva $y = f(x)$. Então vá horizontalmente para um ponto na linha $y = x$. A coordenada do

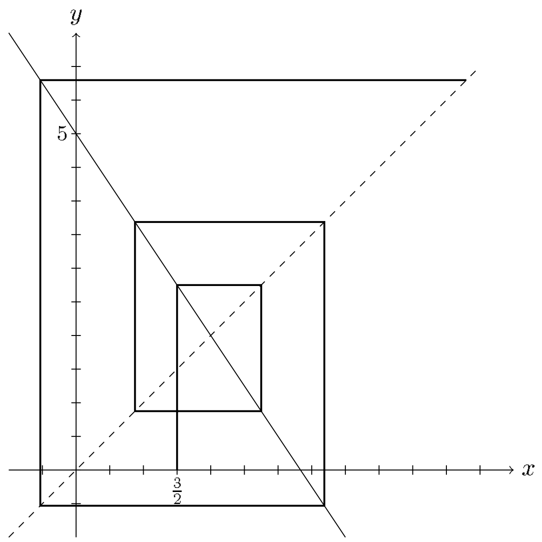


Figura 1.1: Cobweb do sistema $A(n+1) = 1,5A(n) + 5$.

ponto na linha $y = x$ é $A(1)$. Repita estes passos para $A(2), A(3), \ldots$. A figura desenhada é chamada **cobweb de um sistema dinâmico**.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 13.

$$A(n+1) = -1,5A(n) + 5 \quad \text{e} \quad A(0) = 3. \tag{1.14}$$

Temos que $A(1) = 0,5$. Tomando $y = A(n+1)$ e $x = A(n)$, teremos que

$$\begin{aligned} A(n+1) &= -1,5A(n) + 5, \\ y &= -1,5x + 5. \end{aligned}$$

Tomemos agora $x = 0,5$ e calculemos $A(2) = 4,25$.

Primeiramente, traçamos os gráficos de $y = -1,5x + 5$ e $y = x$ e observemos que estes se interceptam no ponto $x = 2$. Procedendo no gráfico o mesmo raciocínio feito nos cálculos acima, teremos, então, a cobweb (figura 1.1).

Observamos que $a = 1$ está atraindo para valores iniciais tomados a sua esquerda e repelindo para pontos tomado à sua direita. A este ponto damos o nome de **ponto de equilíbrio semi-estável**.

5 Soluções de Sistemas Dinâmicos

Definição 14. A solução geral para um sistema linear de primeira ordem

$$A(n+1) = f(A(n)), \tag{1.15}$$

para $n = 0, 1, \ldots$ é a função $A(k)$, com $k = 0, 1, \ldots$ tal que:

1. satisfaça o sistema dinâmico quando substituído por $A(n)$ e $A(n+1)$;
2. envolva uma constante c que pode ser determinada por uma condição inicial.

Teorema 15. *A solução geral para o sistema dinâmico de primeira ordem dado por $A(n+1) = rA(n)$ é*

$$A(k) = cr^k, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{1.16}$$

Teorema 16. *Suponha que seja dado um sistema dinâmico linear de primeira ordem*

$$A(n+1) = rA(n) + b. \tag{1.17}$$

Então a solução geral para este sistema é

$$A(k) = \begin{cases} cr^k + a & se\ r \neq 1, \\ c + kb & se\ r = 1. \end{cases}$$

Prova: Ver [3]. ∎

6 Algumas Aplicações

6.1 Problemas de Finanças

Usando o sistema que acabamos de ver, é possível analisar aplicações financeiras. Vejamos:

Suponha que você abriu uma poupança com depósito inicial de R$ 1000,00 a juros anuais de 8% compostos trimestralmente. Quanto você terá em sua conta depois de 1 ano?

Façamos as seguintes hipóteses:

1. Suponha que temos uma conta que tem uma quantia $A(n)$ depois de n períodos compostos, coletando $100I\%$ ao ano, composto m vezes por ano.

2. Assumamos também que é feito um depósito (ou retirada) b a cada período composto.

Temos, então, o seguinte sistema dinâmico:

$$A(n+1) = (1+\frac{I}{m})A(n) + b. \tag{1.18}$$

No exemplo $b = 0$, pois não há nenhum depósito.

Aplicando o que já foi visto sobre solução de sistemas dinâmicos e tomando $r = (1 + \frac{I}{m}$ e $A(0) = a_0$ a quantia inicial na sua conta, teremos:

$$A(k) = (1+\frac{I}{m})^k(a_0 + \frac{mb}{I}) - \frac{mb}{I}. \tag{1.19}$$

Como $b = 0$, então

$$A(k) = (1+\frac{I}{m})^k a_0.$$

Como 1 ano possui 4 trimestres, $a_0 = 1000$, $I = 8\%$ e $m = 4$, temos $A(4) =$R$ 1082,43.

Muitas vezes o que pode acontecer é que o problema nos fornece o quanto de dinheiro teremos daqui a algum tempo, a taxa, o valor inicial depositado e os depósitos a cada período composto e quer saber quantos períodos são necessários para que o saldo atinja um valor fixado. Ou então, deseja-se saber o depósito inicial ou ainda os depósitos em cada período composto. Enfim, bastam alguns conhecimento em Álgebra e saber algumas propriedades logarítmicas para resolução desses problemas.

6.2 Um modelo de crescimento populacional

Considere uma população de coelhos e que, em média, cada coelho procria 2 filhotes por unidade de tempo e que estes não morrem. Vamos observar como essa população varia com o tempo. Tomemos $A(0)$ sendo a quantia de coelhos no tempo em que começamos a observação ($t = 0$). Então $A(1) - A(0)$ será a mudança do tamanho da população no intervalo de tempo, ou seja,

$$\begin{aligned} A(1) - A(0) &= 2A(0), \\ A(2) - A(1) &= 2A(1), \\ &\vdots \\ A(n+1) - A(n) &= 2A(n). \end{aligned}$$

A solução é

$$A(k) = A(0)3^k. \tag{1.20}$$

Também sabemos que isso não acontece, pois temos que considerar o número de vivos e de mortos na população observada. Tentando fazer um modelo mais realístico, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Assumimos que o número de nascidos no período n é proporcional ao tamanho da população nesse período: $bA(n)$;

2. A mesma suposição vale para o número de mortos: $dA(n)$.

$$A(n+1) - A(n) = bA(n) - dA(n) \Rightarrow A(n+1) = (1 + b - d)A(n).$$

A solução desse sistema é $A(k) = (1 + b - d)^k A(0)$.

Tomando $r = 0,2$ e $A(0) = 100$, calculamos $A(10) = 619$, $A(50) = 910041$ e $A(100) = 8281797451$.

Mas, observamos na natureza que isso também não acontece. Porém, para pequenos valores de tempo, este modelo nos dá boas estimativas de crescimento populacional, pois para pequenos períodos de tempo a taxa de crescimento parece ser constante. Mas para longos períodos de tempo já não se pode dizer isso, isto é, r não é constante, mas muda quando o tamanho da população cresce. Então r deveria ser substituído por $f(A(n))$, ou seja, a taxa de crescimento passa a depender do tamanho da população.

Supondo agora que o ambiente suporta um número limitado de espécies, o qual denotaremos por L, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Se $A(n) > L$, então falta comida ou espaço e, assim, o número de animais mortos será maior do que o de nascidos. Segue que a taxa de crescimento é negativa, $f(A(n)) < 0$ e $A(n) > L$;
2. O contrário também pode acontecer, ou seja, $f(A(n)) > 0$ e $A(n) < L$;
3. Por último, tem-se que $f(A(n)) = 0$ e $A(n) = L$.

Uma função que satisfaz as 3 suposições é $f(A(n)) = r(1 - \frac{A(n)}{L})$, onde r é a taxa de crescimento e L é a capacidade suporte.

Teremos o seguinte modelo:

$$A(n+1) = (1+r)A(n) - bA^2(n), \tag{1.21}$$

onde $b = \frac{r}{L}$.

Se tomarmos $r = 0,2$ e $L = 8$, teremos o sistema $A(n+1) = 1,2A(n) - 0,025A^2(n)$. Neste caso os valores de equilíbrio são $a = 0$ e $a = 8$. Este último é a capacidade suporte do meio.

Muitas vezes, devido a não linearidade do sistema, torna-se complicada a determinação dos pontos de equilíbrio. Um método usado para esta finalidade é o Método de Newton.

Teorema 17. *Suponha que temos uma função $f(x)$ e um número a tal que $f(x)$ é contínua e diferenciável em torno de a, $f(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$. Então o número a é um valor de equilíbrio estável para o sistema dinâmico*

$$A(n+1) = A(n) - \frac{f(A(n))}{f'(A(n))}. \tag{1.22}$$

Isso significa que se escolhermos um a_0 perto o bastante da raiz a, então, $A(k)$ tende a a, quando k tende a infinito.

Estudos quando o teste da primeira derivada é inconclusivo assim como ciclos e noções de bifurcações e caos também foram estudados, mas não serão apresentados neste texto.

7 Utilizando Equações de Diferenças no Ensino Médio

Vários conteúdos de Ensino Médio poderiam ser introduzidos utilizando Equações de Diferenças. Apresentamos a seguir uma sugestão, onde o professor deve propor um tema aos alunos ou até mesmo deixar que os alunos sugiram algum outro tema de interesse de estudo.

Sugerimos aqui o tema FORMATURA, já que este é de muito interesse de alunos do Ensino Médio. Mas isto não impede o professor de mudar para temas como festas e viagens, também de interesse dos alunos, desde que sejam feitas as devidas adaptações e suposições ao modelo. Nesta sugestão, conteúdos como funções exponenciais e logarítmicas, progressões geométricas, dentre outros, poderiam ser introduzidos.

É de fundamental importância que o professor faça questionamentos à medida que o trabalho em sala avança. Vamos supor que se está trabalhando com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, no mês de outubro, tendo, portanto, como objetivo usar o dinheiro investido para pagamento da formatura de toda a sala.

Vejamos, então, um primeiro problema.

Suponha que toda sala abra uma poupança em um banco que paga juros de $0,7\%$ ao mês, fazendo um depósito inicial a_0, com o objetivo de deixar aquele dinheiro no banco por 24 meses.

Os alunos poderiam calcular a quantia presente na conta após vários meses para que percebam a dificuldade de obterem o quanto terão após 24 meses.

Generalizando, poderiam considerar $A(n)$ a quantia de dinheiro na poupança no n-ésimo mês depois que foi aberta a conta, a taxa de juros $I = 0,7\%$ e o depósito inicial $A(0) = a_0$. Nos próximos meses teremos:

$$\begin{aligned} A(1) &= A(0) + 0,007A(0) = 1,007A(0) \\ A(2) &= (1,007)^2 A(0) \\ A(3) &= (1,007)^3 A(0) \end{aligned}$$

Estes primeiros cálculos deveriam induzir os alunos que no mês $(n+1)$ teríamos a seguinte situação:

$$A(n+1) = A(n) + IA(n) = (1+I)A(n). \tag{1.23}$$

Além disso, também nos induziria a pensar que nos mês k teríamos

$$A(k) = (1,007)^k A(0), \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.24}$$

ou seja, no k-ésimo mês saberíamos quanto dinheiro teríamos nesta poupança.

Se, realizado um depósito inicial $A(0)$, desejarmos obter uma certa quantia B, o tempo necessário para que isso ocorra é obtido fazendo

$$B = (1,007)^k A(0) \Rightarrow \frac{B}{A(0)} = (1,007)^k. \tag{1.25}$$

Neste momento, com o objetivo de obter o valor de k, podemos levar o aluno a perceber a necessidade e utilidade da função logarítmica.

Outros questionamentos podem ser feitos:

1. Qual deveria ser o depósito inicial para que tivéssemos uma certa quantia $A(k)$ depois de k meses?

2. E se não tivéssemos condições de depositar uma quantia muito alta e pudéssemos depositar um pouco a cada mês, em quanto tempo teríamos a quantia desejada?

Conceitos como função crescente, decrescente, exponenciais, logaritmos e progressões geométricas poderiam ser introduzidos com estes problemas.

8 Conclusão

O estudo dos vários tipos de sistemas dinâmicos discretos, suas respectivas soluções e exemplos, nos permite uma maior e melhor visão daquilo que acontece ao nosso redor, no sentido de permitir uma modelagem matemática simples, porém, muitas vezes eficaz para aquilo que estamos estudando. Durante todo o período de iniciação científica, foi possível entender de uma forma simples como o estudo de sistemas dinâmicos está relacionado às diversas áreas do conhecimento e analisar sua importância para que futuramente se possa entender modelagens mais complexas.

Abstract: We studied some kinds of difference equations, the existence of analytic solution, the stability of the equilibrium points and some models of population growth that use difference equations. Besides that, we propose activities to motivate the study of exponential and logarithmic functions.

Keywords: Mathematical modeling, difference equations, stability.

Referências Bibliográficas

[1] Bassanezi, R.C., *Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática*, Ed. Contexto, 2002.

[2] Keshet, L.E., *Mathematical Models in Biology*, Birkhäuser Mathematics Series, 1988.

[3] Sandefur, J.T., *Discrete Dynamical Systems*, Oxford: Claredon, 1990.

ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem LaTeX, usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em `www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat`, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.